ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Service de l'enseignement secondaire du deuxième degré
Amt für Unterricht der Sekundarstufe 2
Collège Sainte-Croix
Kollegium Heilig Kreuz

Examen de maturité 2016
Collège Sainte-Croix
1700 FRIBOURG

MATHÉMATIQUES

niveau II

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-84+
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.

Remarques : Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.

Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.

Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille.

Faire une marge sur chaque page.

Problème 1 (12 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x-2)\arctan(x)$.

a) Préciser le domaine de définition de f et calculer ses zéros.

b) Vérifier que pour tout $x \neq 0$, $\quad (x-2)\arctan(x) - \dfrac{\pi}{2}x = \dfrac{(1-\frac{2}{x})\arctan(x) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$.

c) Le graphe de f possède deux asymptotes obliques.
Déterminer l'équation de l'asymptote oblique vers ∞.

d) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1} + \arctan(x)$.

e) Montrer que le graphe de f ne possède qu'un seul point d'inflexion dont on déterminera uniquement l'abscisse.

f) A l'aide de votre calculatrice, déterminer l'unique zéro x_0 de f' et préciser la nature de $f(x_0)$.

g) **En effectuant une intégration par parties**, montrer que

$$F(x) = (\tfrac{1}{2}x^2 - 2x)\arctan(x) - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\arctan(x) + \ln(x^2+1)$$

est une primitive de f.

h) Calculer l'aire exacte de la région bornée du plan délimitée par la courbe de f et l'axe des abscisses.

Problème 2 (8 points)

Dans un collège de 1500 élèves on estime que 70 % d'entre eux vont au moins un fois par mois au cinéma. On considère 100 élèves pris au hasard avec remise parmi les 1500 élèves de ce collège.
On désigne par X la variable aléatoire donnant, parmi ces 100 élèves, le nombre de ceux qui ne vont pas au moins une fois par mois au cinéma.

a) Quelle loi suit la variable X ? On précisera les paramètres de cette loi.

b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

c) Quelle est la probabilité que 30 élèves n'aillent pas au cinéma au moins une fois par mois ?

d) Calculer $p(28 \leq X \leq 32)$.

On décide d'approcher cette loi par une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma)$. Soit Y la variable aléatoire suivant cette loi.

e) Donner la valeur de μ et celle de σ.

f) Calculer une valeur approchée de $p(X \leq 25)$.

Problème 3 (10 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne

- le point $M(1; 9; -8)$.
- la droite d_1,

$$d_1 \ : \ \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 - 14t \\ z = -4 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

- le plan π_1 d'équation $3x - 2y + 6z - 20 = 0$,

a) Calculer la distance du point M à la droite d_1.

b) Calculer les coordonnées des points de d_1 situés à une distance 13 du plan π_1.

c) Déterminer l'équation cartésienne du plan π_2 contenant le point M et la droite d_1.

d) Déterminer l'équation des sphères tangentes aux plans π_1 et π_2 et dont les centres se situent sur la droite d_2

$$d_2 \ : \ \begin{cases} x = 17 + 5s \\ y = -2 + s \\ z = 7 - s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

Problème 4 (10 points)

On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f \ : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ -x + 3y - 2z \\ -x + 2y - z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Donner la matrice M associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer l'image par f du sous-espace vectoriel $U = L\big((6; 5; 2)\big)$.

c) Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire.

d) Calculer les valeurs propres de f.

e) Déterminer alors les sous-espaces propres.

f) Peut-on trouver une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la représentation matricielle de f est une matrice diagonale ? Si oui, en donner une.