ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Service de l'enseignement secondaire du deuxième degré
Amt für Unterricht der Sekundarstufe 2
Collège Sainte-Croix
Kollegium Heilig Kreuz

Maturité 2016

MATHÉMATIQUES

niveau I

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-82, 83, 84
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.
Remarques :	Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.
	Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.
	Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.
	Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille.
	Faire une marge sur chaque page.

Problème 1 (10 points)

Emilie, Mégane et Jeanne étudient au collège SC et prennent assez souvent le repas de midi à la cafétéria du collège. Emilie y mange 1 jour sur 2. Mégane y mange 3 fois sur 4 lorsque Emilie y mange, mais n'y va jamais si Emilie n'y va pas. Quant à Jeanne, elle y mange 2 fois sur 3 si ses deux camarades y mangent, 1 fois sur 2 si Emilie y va sans Mégane et 1 fois sur 3 si aucune des deux n'y va.

On notera les événements suivants : E = «Emilie mange à la cafétéria» , M = «Mégane mange à la cafétéria» et J = «Jeanne mange à la cafétéria»

Partie 1

1. Donner l'arbre des probabilités.
2. Quelle est la probabilité qu'aucune des trois ne mange à la cafétéria ?
3. Quelle est la probabilité que deux des trois y mangent ?
4. Quelle est la probabilité que Jeanne y mange, si Mégane n'y mange pas ?
5. Quelle est la probabilité que Jeanne y mange, si Mégane et Emilie n'y mangent pas ?
6. Montrer que la probabilité que Jeanne mange à la cafétéria vaut 23/48.

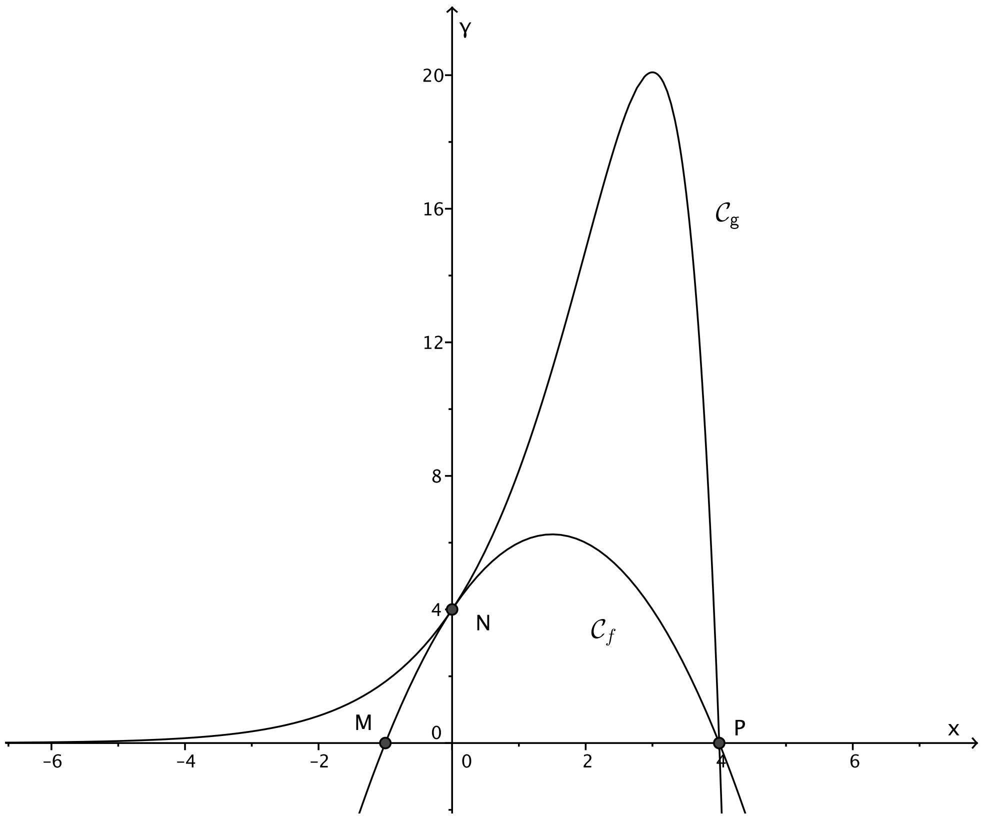
Partie 2

Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de fois que Jeanne mange à la cafétéria de l'école sur une semaine de 5 jours.

1. Donner la loi de probabilité de X avec des probabilités à 4 décimales.
2. En moyenne, combien de jours Jeanne mange-t-elle à la cafétéria ?
3. Quelle est la probabilité que Jeanne y mange au moins 2 fois ?

Problème 2 (9 points)

Soient $f(x) = -x^2+3x+4$ et $g(x) = (4-x)e^x$ des fonctions dont les graphes sont données ci-dessous relativement à un repère orthonormé.

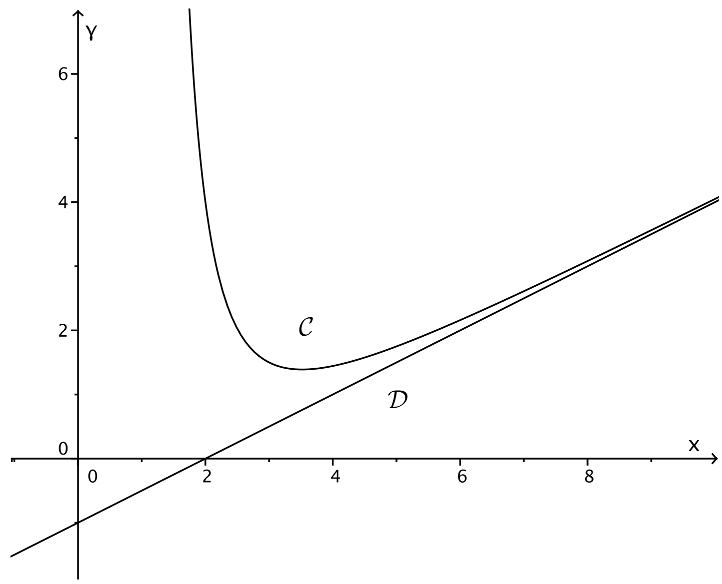


1. Calculer les coordonnées des points d'intersection M, N et P de la courbe de f avec les axes.
2. Montrer que les courbes de f et g ont des tangentes de même pente au point N.
3. Calculer la valeur de x pour laquelle la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x est parallèle à la droite NP.
4. Soit Q un point de la courbe de g situé dans le premier quadrant et soit I sa projection orthogonale sur l'axe des x. Quelles sont les coordonnées de Q pour lesquelles l'aire du triangle QOI est maximale ? (Vérifier qu'il s'agit bien d'une aire maximale !)

Problème 3 (6 points)

Partie 1

Dans le graphique ci-dessous sont tracées la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1 + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$, asymptote oblique de $\mathcal{C}$.



1. Déterminer les équations des asymptotes de $\mathcal{C}$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ entre les courbes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, pour $2 \leq x \leq \alpha$.
3. Calculer la limite de $\mathcal{A}_\alpha$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie 2

Calculer le volume V engendré par la rotation autour de l'axe x de la courbe $\mathcal{E}$ représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{f(x)}$ définie sur l'intervalle $[2; 6]$.

Problème 4 (13 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(2;1;12)$, $B(-1;16;6)$, $C(5;4;12)$ et $D(2;3;-8)$.

Partie 1

1. Montrer que $x - y - 3z + 35 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. Calculer la distance δ du point D au plan (ABC).
4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Partie 2

1. Déterminer des équations paramétriques de la droite (BC).
2. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ dont le segment $[AD]$ est un diamètre.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection U et V de la droite (BC) et de la sphère Σ.
   (Les points U et V ont des coordonnées entières !)

Partie 3

Donner le centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère Σ avec le plan (ABC).