ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Service de l'enseignement secondaire du deuxième degré
Amt für Unterricht der Sekundarstufe 2
Collège Sainte-Croix
Kollegium Heilig Kreuz

Maturité 2015

MATHÉMATIQUES

niveau II

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-82, 83, 84
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.
Remarques :	Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.
	Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.
	Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.
	Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille.
	Faire une marge sur chaque page.

Problème 1 (11 points)

On considère la fonction réelle f définie par $f(x) = x + ln|1 - e^x|$.

a) Déterminer Df.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 1}$ et donner le tableau de variation de f.

c) Donner la valeur exacte de l'unique zéro de f.

d) Calculer la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} ln|1 - e^x|$ et déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de f pour $x \to -\infty$.

e) Montrer que $f(x) = 2x + ln(1 - e^{-x})$ sur R_+^* et déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de f pour $x \to +\infty$.

f) Déterminer l'équation de la troisième asymptote au graphe de f.

g) Montrer que f ne possède pas de point d'inflexion et représenter son graphe dans un repère orthonormé (unité : 5 carrés).

Problème 2 (9 points)

On considère le point $D(1; 0; 2)$ et le vecteur $\vec{d} = (2; -2; 3)$.

a) Donner des équations paramétriques de la droite $d = (D, \vec{d}\,)$ et l'équation cartésienne de la sphère Σ centrée à l'origine et de rayon 1.

b) Calculer la distance δ de l'origine à la droite d.

c) Donner l'équation cartésienne du plan α contenant la droite d et l'origine.

d) Donner l'équation cartésienne, de la forme $3X + b(c)Y + cZ + d(c) = 0$, de tous les plans π de l'espace contenant la droite d.

e) Parmi tous les plans contenant la droite d, déterminer les équations cartésiennes des deux plans β et β' tangents à la sphère Σ. On doit trouver $3x + 6y + 2z - 7 = 0$ comme équation du plan β.

f) Calculer l'angle ϵ des plans β et β' à partir de leurs équations cartésiennes.

g) Calculer l'angle ϵ des plans β et β' à partir de la distance δ calculée point b).

h) Par projection du vecteur $\overrightarrow{OD}$ déterminer le point de contact P de la sphère Σ et du plan β.

Problème 3 (7 points)

L'examen d'entrée d'une université américaine très sélective est constitué d'une épreuve écrite et d'une épreuve orale. Les deux épreuves sont notées chacune sur 100 points et toutes les notes sont entières. La correction de l'écrit montre des résultats distribués selon la loi normale $N(55; 11)$ et les résultats de l'oral sont distribués selon une loi normale $N(\mu; \sigma)$. Soit X_E la V.A. qui prend pour valeurs les notes obtenues à l'écrit et X_O la V.A. qui prend pour valeurs les notes obtenues à l'oral. Tous les pourcentages seront donnés avec une seule décimale.

a) Quelle est la proportion de candidats dont la note à l'écrit appartient à l'intervalle $[50; 60]$?

b) Sont déclarés avoir réussi la première épreuve le 27,8% des meilleurs candidats. Quelle est la note minimale qu'il faut avoir obtenue pour avoir réussi l'écrit ?

c) Pour l'oral, on sait que 39% des candidats ont une note inférieure ou égale à 42 et que 67% des candidats ont une note supérieure à 40. Déterminer la moyenne μ et l'écart-type σ de la variable X_O.

d) Sont déclarés avoir réussi la seconde épreuve les candidats qui ont une note supérieure à 58. Montrer que cela représente 15,9% des candidats.

e) Si on suppose que les V.A. X_E et X_O sont indépendantes, quelle proportion de candidats ont réussis les deux épreuves ?

f) Si on suppose qu'un candidat qui a réussi l'écrit a trois fois plus de chance de réussir l'oral qu'un candidat qui a échoué l'écrit, quelle est la proportion de candidats qui ont réussi l'oral sachant qu'ils ont réussi l'écrit ?

Problème 4 (13 points)

Une population d'oiseaux est composée d'individus vivant en moyenne trois ans. Cette population est décomposée en trois classes d'âge d'une année C_1, C_2 et C_3. Au bout d'une année :

- seul 1/5 des individus de la classe C_1 survit ;
- chaque individu de la classe C_2 a donné naissance en moyenne à $4,2$ nouveaux individus. Mais 4/5 des individus de cette classe meurt.
- chaque individu de la classe C_3 a donné naissance en moyenne à 4 nouveaux individus avant de mourir.

Cette population peut être définie par un vecteur $(x; y; z)$ où x, y, et z représentent le nombre d'individus dans chaque classe d'âge.

a) Donner la matrice F de l'application linéaire f qui caractérise l'évolution annuelle de cette population d'oiseaux.

b) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ à l'aide d'un seul calcul.

c) Que devient au bout de trois ans une population composée de 125 individus dans chaque classe ?

d) La matrice F a-t-elle des valeurs propres ? Si oui, sont-elles significatives ? (expliquer)

e) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres trouvées.

f) Donner la matrice F^* de f dans une base B^* appropriée de vecteurs propres.

g) Que peut-on dire de l'évolution d'une population quelconque sur le long terme ?

h) Que devient sur le long terme une population composée initialement de 108 individus dans chaque classe ?