ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Service de l'enseignement secondaire du deuxième degré
Amt für Unterricht der Sekundarstufe 2
Collège Sainte-Croix
Kollegium Heilig Kreuz

Maturité 2015

MATHÉMATIQUES

niveau I

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-83/TI-84+
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.

Remarques : Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.

Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.

Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille.

Faire une marge sur chaque page.

Problème 1 (10,5 points)

Une urne contient 7 boules noires et 3 boules blanches. Ces 10 boules sont indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne.
La partie est gagnée si on tire deux boules de couleurs différentes.

1) Représenter la situation par un arbre.
   Un joueur joue une partie. Montrer que la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes est égale à 0,42.

2) Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

   a) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une fois s'il joue 10 parties (réponse au millième).
   b) Calculer, en fonction de n, la probabilité que le joueur gagne au moins une fois s'il joue n parties.
   c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

3) Supposons que l'urne contienne maintenant k boules noires et 3 boules blanches et donc $k + 3$ boules au total (k est un entier naturel supérieur ou égal à 2).

   Une partie consiste, comme précédemment, à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne.
   On établit la règle du jeu suivante :
   – Le joueur perd 9 francs si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
   – Le joueur perd 1 franc si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
   – Le joueur gagne 5 francs si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

   On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   a) Représenter la situation par un arbre.
      Montrer que la probabilité d'avoir un gain de 5 francs est égale à $\dfrac{6k}{(k+3)^2}$.
   b) Pour quelle valeur de k cette probabilité est-elle maximale ? Contrôler qu'il s'agit d'un maximum.
   c) Donner la loi de probabilité de X en fonction de k.

Problème 2 (11 points)

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

On donne les points $A(0;-3;4)$ et $B(-1;-3;1)$ et la droite (d) passant par B et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Donner l'équation de la sphère (S) de diamètre $[AB]$.
2) Trouver l'équation du plan tangent à la sphère (S) au point A.
3) Calculer les coordonnées du point C élément de la droite (d) tel que le triangle ABC soit rectangle en A.
4) Déterminer les coordonnées possibles du sommet D du tétraèdre $ABCD$, sachant que (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) et que le volume du tétraèdre est égal à 65. *Prendre le point* $C(3;1;3)$ *si vous n'avez pas trouvé* C *au point* 3.

Problème 3 (7,5 points)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

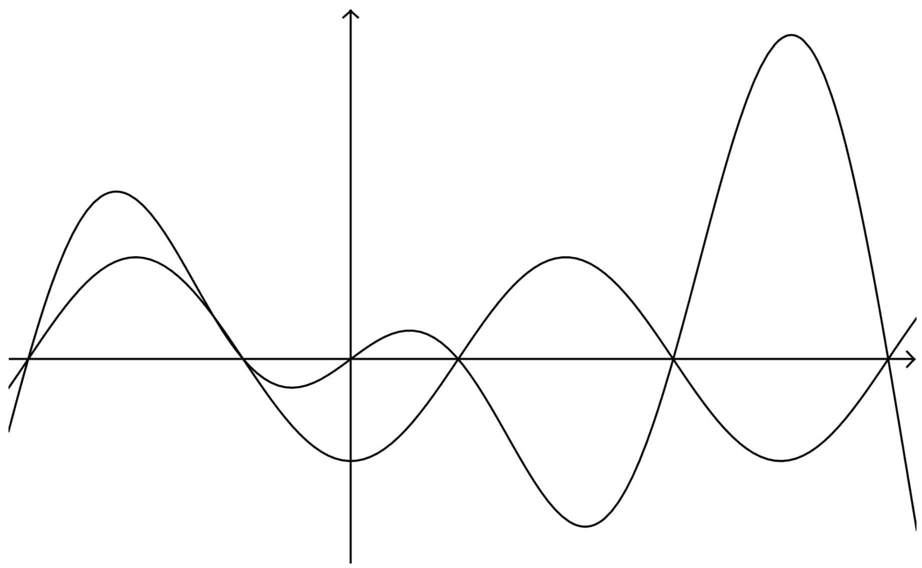
1. Chercher la (les) équation(s) de la (des) asymptote(s) horizontale(s) à la courbe de f.
2. Montrer que $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. On appelle (T) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
   Donner l'équation cartésienne de (T).

Problème 4 (11 points)

Soit les fonctions :

$$f(x) = -2\cos(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = x\cos(x)$$

dont les courbes sont représentées ci-dessous.



a) Calculer les abscisses de *tous* les points d'intersection des deux courbes de manière générale (*détails des calculs*) puis donner les abscisses de ceux situés dans l'intervalle $[-\pi; 2\pi]$.

b) Calculer les coordonnées des points dont les tangentes à la fonction f, sur l'intervalle $[-\pi; 2\pi]$, sont horizontales.

c) Déterminer la valeur de h pour que la droite d'équation $y = 2x + h$ ($h \in \mathbb{R}$) soit tangente à la courbe de f au point $P(x_0; y_0)$, où $x_0 \in [0; \pi]$.

d) Poser la formule permettant de calculer l'aire comprise entre les deux courbes sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ puis calculer la primitive à l'aide de l'intégration par parties.