



ETAT DE FRIBOURG  
STAAT FREIBURG

Service de l'enseignement secondaire du deuxième degré  
Amt für Unterricht der Sekundarstufe 2  
Collège Sainte-Croix  
Kollegium Heilig Kreuz

## Maturité 2014

### Mathématiques (*niveau II*)

Durée de l'épreuve : 180 minutes

Ouvrage et matériel autorisés : *Formulaires et Tables CRM, Calculatrice TI-84*

Barème : Nombre de points indiqué pour chaque problème.

Remarques : -

Nombre de pages (y.c. page de garde) : 5

A résoudre sur une nouvelle double-page.

## Problème 1

(14 points)

### Partie I

On considère le repère de  $\mathbb{R}^3$  :  $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  et le tétraèdre  $OABC$ .

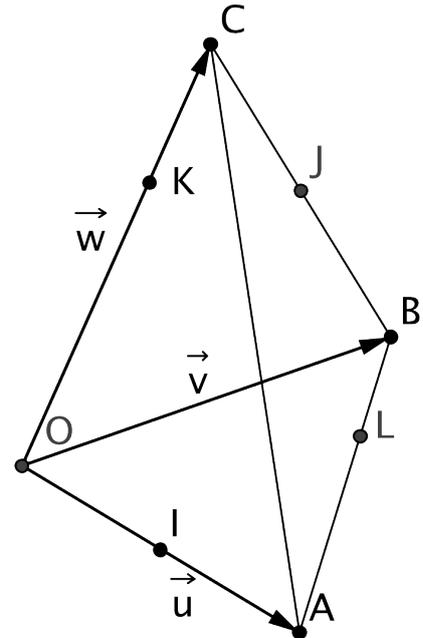
$$\vec{u} = \overrightarrow{OA}; \quad \vec{v} = \overrightarrow{OB}; \quad \vec{w} = \overrightarrow{OC}.$$

On définit :

·  $I$  le milieu de  $[OA]$  et  $J$  le milieu de  $[BC]$ .

·  $\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$  et  $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .

Montrer que les points  $I, J, K$  et  $L$  sont coplanaires



### Partie II

Un tétraèdre  $O E F G$  est donné par  $O(0; 0; 0)$ ,  $E(8; 4; 2)$ ,  $F(6; 2; 4)$  et  $G(-7; 13; 14)$ .

Calculer le pied de la hauteur du tétraèdre issue de  $G$ . (Intersection de la hauteur issue de  $G$  et du plan  $O E F$ ).

### Partie III

Les points  $A(5; 1; -1)$ ,  $B(4; 1; -4)$  et  $C(1; -3; -3)$  déterminent un triangle.

Donner le centre et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle. Ce cercle est l'intersection d'une sphère et d'un plan.

A résoudre sur une nouvelle double-page.

## Problème 2

(10 points)

Un scientifique étudie une colonie de souris. Il note qu'elles produisent en moyenne deux filles par femelle pendant leur première année de vie et 12 pendant leur seconde année. Il note aussi qu'elles ont seulement 25% de chance de survivre une seconde année et aucune de survivre au-delà.

Notation :

$j_t$  le nombre de jeunes femelles (1<sup>re</sup> année de vie) au début de la  $t^e$  année et

$a_t$  le nombre de femelles adultes (2<sup>e</sup> année de vie) au début de la  $t^e$  année.

### Partie I

1. Exprimer  $j_{t+1}$  et  $a_{t+1}$  en fonction de  $j_t$  et  $a_t$ .
2. En déduire la matrice  $M$  de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  tel que :

$$\begin{pmatrix} j_{t+1} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} j_t \\ a_t \end{pmatrix}$$

### Partie II

Une autre étude donne la matrice de l'endomorphisme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer les vecteurs propres et valeurs propres de cet endomorphisme et donner sa matrice  $M'$  relativement à la base de vecteurs propres.
4. Calculer  $(M')^n$ .
5. En admettant que  $M = P \cdot M' \cdot P^{-1}$ , exprimer  $\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$  en fonction de  $\begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ .
6. Calculer l'effectif des souris après cinq ans si, au départ, il n'y avait qu'une souris adulte portante.

A résoudre sur une nouvelle double-page.

## Problème 3

(9 points)

### Partie I

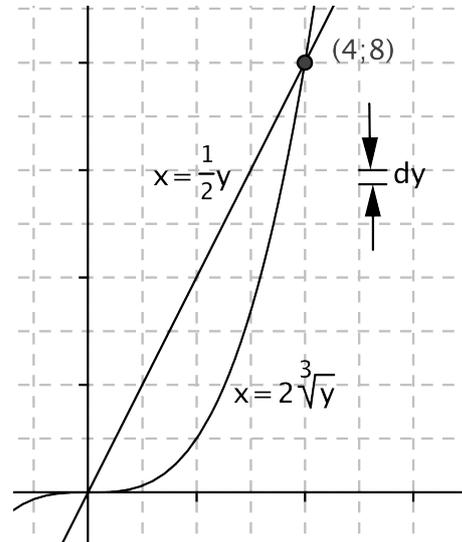
Soit le cercle centré en  $O(0;0)$  de rayon  $r$  d'équation  $x^2 + y^2 = r^2$ . Le demi-cercle avec  $y \geq 0$  représente la courbe d'une fonction  $f$ .

1. A l'aide du calcul intégral, montrer que la longueur de la courbe de  $f$  qui correspond à un demi-cercle est de  $\pi \cdot r$ . (Pour le calcul de la primitive, on effectue une substitution trigonométrique).

### Partie II

On considère la fonction  $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^3$  et la fonction  $g(x) = 2x$ . On fait tourner autour de l'axe des ordonnées la région du premier quadrant comprise entre les courbes de  $f$  et  $g$ .

2. Quel est le volume du solide ainsi engendré?



A résoudre sur une nouvelle double-page.

## Problème 4

(4 points)

Un garage offre à sa clientèle deux sortes de jeux de pneus. A « le sportif » et B « le performant ».

Au printemps, 90 clients se présentent pour changer de pneus.

Par expérience le garage sait qu'un client achète quatre pneus de la série A avec une probabilité de 0.7

On pose  $X$  le nombre de clients qui choisissent la série A.

- a) Calculer la probabilité que  $X$  prenne la valeur 52.
- b) Calculer la moyenne et l'écart type de  $X$ .
- c) Quelle est la probabilité que  $X$  se situe entre 52 et 75 ? ( 52 et 75 non compris).