ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Service de l'enseignement secondaire du deuxième degré
Amt für Unterricht der Sekundarstufe 2
Collège Sainte-Croix
Kollegium Heilig Kreuz

Maturité 2014

MATHÉMATIQUES

niveau I

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-83/TI-84+
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.

Remarques : Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.

Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.

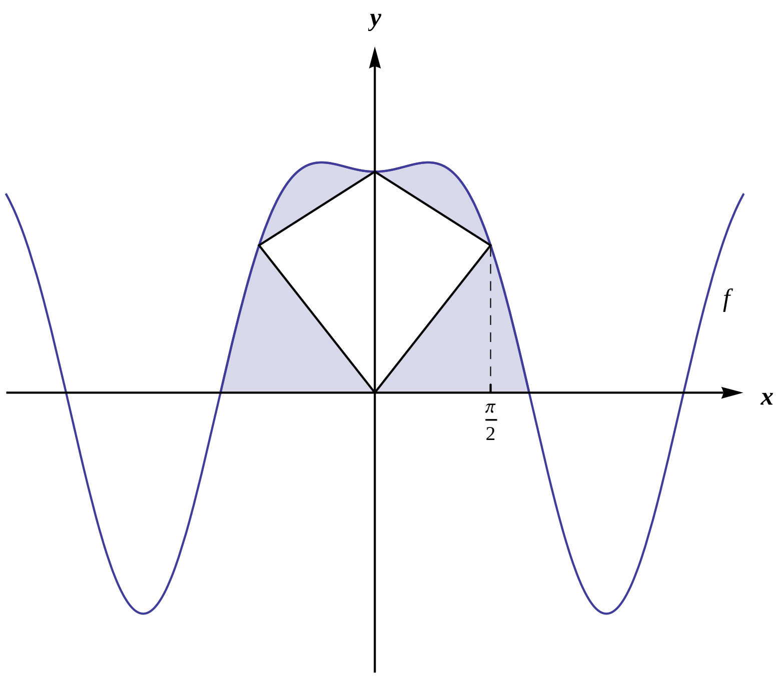
Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille.

Faire une marge sur chaque page.

Problème 1 (8 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\sin^2(x) + 3\cos(x)$. Le graphe de cette fonction est donné ci-dessous.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Calculer la valeur exacte de $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
3. Calculer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer que la fonction p définie par $p(x) = x + 3\sin(x) - \cos(x)\sin(x)$ est une primitive de f.
5. Calculer l'aire exacte de la région ombrée.



Problème 2 (9 points)

Dans le cadre d'une journée « découverte » consacrée à l'alimentation, les écoliers d'une classe doivent découvrir le nom de différents aliments à leur goût. Pour chaque aliment goûté, on leur propose deux noms et ils doivent découvrir le bon.

Partie 1
On suppose que chacun répond indépendamment de ses camarades. Et on constate qu'un écolier découvre le bon aliment en moyenne sept fois sur dix.

1. Si la classe comporte douze écoliers, qu'elle est la probabilité que cinq d'entre eux répondent faux ?
2. On propose à cinq écoliers de se mettre ensemble et de choisir la réponse de leur groupe à la majorité.
   a) Quelle est la probabilité que trois écoliers sur les cinq découvrent le bon aliment ?
   b) Quelle est la probabilité que le groupe donne la bonne réponse ?
   c) Est-ce que le groupe fait le bon choix plus fréquemment que chacun des écoliers séparément ? (justifier la réponse)
3. On propose maintenant à trois écoliers de se mettre ensemble et de toujours choisir leur réponse à la majorité.
   a) Quelle est la probabilité que le groupe donne la bonne réponse ?
   b) La probabilité que le groupe trouve juste est-elle plus grande à trois qu'à cinq ? (justifier la réponse)
4. On propose à nouveau à trois écoliers de se mettre ensemble et de toujours choisir leur réponse à la majorité.
   a) Si un des écoliers sait qu'il a neuf chances sur dix de répondre juste, alors que ses deux camarades n'ont chacun que sept chances sur dix de répondre juste, est-il avantagé par la réponse de son groupe ? (justifier la réponse)
   b) Deux écoliers répondent chacun sept fois sur dix juste. Le troisième écolier répond juste avec une autre probabilité p. A partir de quelle valeur de p est-il désavantagé par la réponse de son groupe ?

Partie 2
Eléonore découvre le bon aliment quatre fois sur dix, Jeanne découvre le bon aliment cinq fois sur dix et Paul répond deux fois sur trois comme Jeanne qui est son amie. A part Paul qui est influencé par Jeanne, ils répondent indépendamment les uns des autres. Ils répondent à une question.

1. Représenter la situation sur un arbre.
2. Quelle est est la probabilité que deux sur trois répondent juste ?
3. Quelle est est la probabilité que Paul ait répondu comme Jeanne ?
4. Quelle est est la probabilité que deux sur trois répondent juste sachant que Paul a répondu comme Jeanne ?
5. Quelle est est la probabilité que deux sur trois répondent juste sachant que Paul a répondu comme Eléonore ?

Problème 3   (10 points)

Soit π_1 le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et π_2 le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1. Montrer que π_1 et π_2 sont perpendiculaires.

2. Soit d la droite d'intersection de π_1 et π_2. Vérifier qu'une représentation paramétrique de d est :

$$\begin{cases} x &= -7+2t \\ y &= -8+3t\ , \qquad t\in \mathbb{R} \\ z &= t \end{cases}$$

3. Soit M un point quelconque de d de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9;-4;-1)$.

   a) Vérifier que A n'appartient ni à π_1, ni à π_2.

   b) Exprimer $||\overrightarrow{AM}||^2$ sous la forme at^2+bt+c.

   c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=2t^2-2t+3$. Étudier les variations de f.

   d) Utiliser b) et c) pour trouver le point M pour lequel la distance AM est minimale ?

4. Soit π_3 le plan orthogonal à d passant par A.

   a) Déterminer une équation cartésienne de π_3.

   b) Démontrer que le point $I\left(-6;-\dfrac{13}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur d.

Problème 4   (6 points)

On a représenté sur la feuille en annexe le graphe d'une fonction $f : [-15;15] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x=-10$.

1. Déterminer $f'(-10)$.

2. Signaler sur le graphique les points d'inflexion du graphe de f et en donner le nombre.

3. Donner le signe de

   a) $\displaystyle\int_{-5}^{5} f(x)dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{13} f(x)dx$

4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la région ombrée.
   a) Comment calcule-t-on $\mathcal{A}$?
   b) Déterminer un encadrement de $\mathcal{A}$ le plus exact possible, en utilisant le quadrillage donné, c'est-à-dire trouver deux entiers positifs a et b tels que $a<\mathcal{A}<b$.

5. Soit F une primitive de f. Donner le tableau de variation de la fonction F.

Nom : **Prénom :** **Classe :** **Numéro candidat :**

Annexe au problème 4