Examen de maturité 2013
Collège Sainte-Croix
1700 FRIBOURG

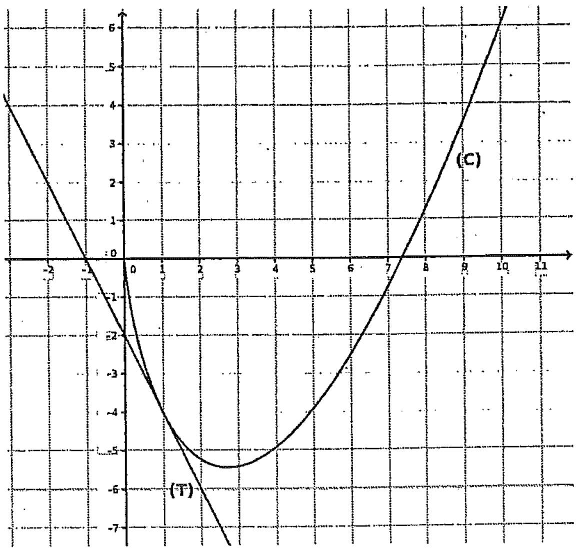
MATHEMATIQUES

niveau I

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-83+
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.
Remarques :	Une présentation et une rédaction soignées sont exigées. Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail. Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille. Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille. Faire une marge sur chaque page.

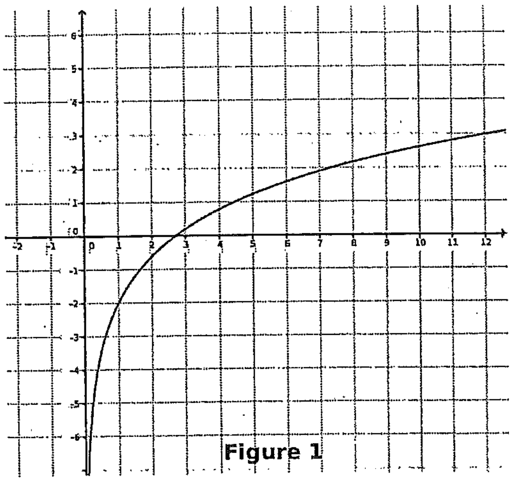
Problème 1 (13 points)

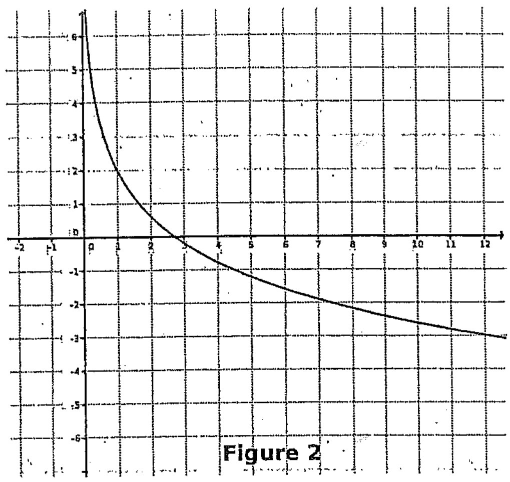
(C) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]0; \infty[$ et (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.



a) Déterminer par lecture du graphique $f(1)$ et $f'(1)$.

b) L'une des courbes ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée de f. Laquelle ? Justifiez votre réponse.





c) La fonction f est définie par une expression de la forme $f(x) = ax\,(\ln(x) - b)$. Déterminer les nombres a et b à l'aide de la question a).

d) Supposons que $f(x) = 2x\,(\ln(x) - 2)$, calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

e) Calculer le zéro de f (valeur exacte).

f) Donner la dérivée de f, établir le tableau de variation et déterminer les coordonnées de l'extremum.

g) Déterminer l'aire exacte du domaine limité par la courbe (C) représentative de f, l'axe des x et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ en calculant la primitive.

Problème 2 (12,5 points)

On donne les points $A(6;0;0)$, $B(0;4;0)$ et $C(0;0;6)$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan π_1 défini par les points A, B et C.
2. On considère le triangle ABC :
   a) Déterminer l'équation vectorielle de la médiane (M) issue de sommet C.
   b) Déterminer l'équation cartésienne du plan π_2 « médiateur » du côté AB c'est-à dire le plan π_2 qui passe par le milieu du côté AB et qui est perpendiculaire à ce côté.
   c) Déterminer l'équation vectorielle de la médiatrice (D) du côté AB contenue dans le plan π_1.
   d) Montrer que le triangle ABC est isocèle.
   e) Calculer la mesure en degrés de l'angle α de sommet A du triangle ABC.
   f) Vérifier que l'aire du triangle ABC est $6\sqrt{17}$.

Problème 3 (6,5 points)

On prend un lacet d'un mètre de long. On le coupe en deux morceaux. Avec le premier morceau, on forme un carré et avec le second, un cercle. On considère l'aire totale formée par le cercle et par le carré ainsi définis.

Calculer, au centimètre près, la longueur de chaque morceau pour que l'aire totale ainsi formée soit minimale.

Problème 4 (12 points)

PARTIE A

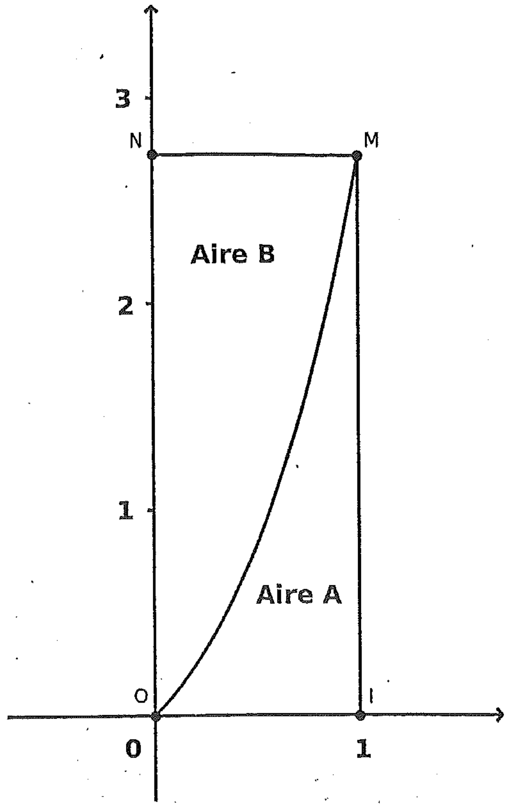
Vérifier que $F(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de $f(x) = xe^x$.

PARTIE B

Soit $f(x)$ la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$. Dans le repère ci-contre, la courbe de f partage la cible rectangulaire $OIMN$ en deux aires A et B.

Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des deux parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni de la courbe C.

On suppose que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B, notées $p(A)$ et $p(B)$ respectivement, sont proportionnelles à leurs aires respectives, autrement dit on sait que $\frac{p(A)}{p(B)} = \frac{\text{Aire de la partie } A}{\text{Aire de la partie } B}$.



1. Démontrer que **la probabilité d'atteindre la partie** A **est égale à** $\frac{1}{2e}$. En déduire la probabilité d'atteindre la partie B (valeur exacte).
2. *Arrondir les réponses au millième.*
   On lance de manière indépendante trois fléchettes.
   a) Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint la partie extérieure de la cible, quelle est la probabilité que les trois se trouvent dans la partie B.
   b) Soit X la variable aléatoire qui est égale au **nombre de fléchettes ayant atteint la partie** A. Définir la loi de probabilité X. En déduire la valeur de son espérance mathématique.
3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.
   a) Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.
   b) Déterminer le plus petit nombre entier naturel n tel que $p_n \geq 0,99$.