



ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Service de l'enseignement secondaire du deuxième degré
Amt für Unterricht der Sekundarstufe 2
Collège Sainte-Croix
Kollegium Heilig Kreuz

Examen de maturité 2012
Collège Sainte-Croix
1700 FRIBOURG

MATHÉMATIQUES

niveau II

Durée de l'épreuve : 3 heures

Ouvrage et matériel autorisés : Formulaires et tables, Calculatrice TI-83+

Barème : Points indiqués sur chaque problème.

Remarques : Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.

Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.

Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille.

Faire une marge sur chaque page.

Problème 1 (11 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- a) Montrer $x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$.
- b) Montrer que f est une fonction impaire.
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- d) Montrer clairement que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ puis étudier la croissance de f .
- e) Dédire du point précédent que la fonction f est bijective sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa réciproque.
- f) En effectuant une intégration par parties, déterminer une primitive de f .
- g) Soit α un nombre réel positif et soit $\mathcal{R}$ la région du plan délimitée par la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = 0$.
En utilisant votre calculatrice, déterminer la valeur de α pour que l'aire de la région du plan délimitée par la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = 0$ soit égale à 5. On donnera la valeur de α à 10^{-5} près.

Problème 2 (6 points)

Les vitesses des véhicules qui circulent sur une autoroute limitée à 130 km/h sont normalement distribuées autour d'une moyenne de 122 km/h avec un écart-type de 8 km/h.

- a) Quelle est la probabilité qu'un véhicule choisi au hasard respecte la limite prescrite?
- b) Si la police reçoit comme instruction de dresser un procès-verbal aux automobilistes qui dépassent 135 km/h, quel est le pourcentage d'automobilistes visés?

Problème 3 (4 points)

Démontrer, par induction, que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^n 3^i \cdot 2^{n-i} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

Problème 4 (9 points)

Lors d'un exercice militaire, l'aviation doit prendre en chasse un sous-marin dont on aura déterminé la position.

Relativement à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (unité : le km), deux navires A et B localisent le sous-marin. Dès que la position du submersible est connue, un avion se rend en ce lieu en 30 min.

Lors d'un premier repérage, le navire A, positionné en $(0; 0; 0)$, situe le sous-marin dans la direction donnée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Au même moment, le navire B, positionné en $(0; 4; 0)$, situe le sous-marin dans la direction donnée par le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Quatre minutes plus tard, un deuxième repérage permet de localiser le submersible en $P_2(23; 36; -\frac{9}{4})$.

Pour toutes les questions ci-dessous, on suppose un mouvement rectiligne uniforme du sous-marin.

- Calculer les coordonnées du point P_1 où se trouve le sous-marin lors du premier repérage.
- Quatre minutes s'écoulent entre les deux repérages.
Pendant ce temps, le sous-marin est-il en plongée ou remonte-t-il en surface?
- Quelle est la vitesse (en km/h) du sous-marin?
- Donner l'équation de la trajectoire rectiligne du sous-marin, parti de P_1 , en faisant intervenir sa vitesse. Quelle est alors la signification physique du paramètre?
- Où se trouve le sous-marin au moment où l'avion le survole?

La trajectoire rectiligne d'un deuxième sous-marin est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 31 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ (} t \text{ en heure)}$$

On pose $t = 0$ lorsque le premier sous-marin se trouve en P_1 .

- Calculer la distance minimale entre les deux trajectoires des sous-marins.
- Exprimer, en fonction du temps, la distance $d(t)$ entre les deux sous-marins.
- À l'aide de la calculatrice (on ne demande pas le calcul de la dérivée), donner la distance $d(t)$ minimale et le moment t où elle est atteinte.