



Maturité 2012

Mathématiques Niveau I

Durée de l'épreuve : 180 Minutes

Ouvrages et matériels autorisés : Formulaires et tables,
Calculatrice graphique TI 83, TI 84

Barème : Points indiqués sur chaque problème.

Remarques : Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.
Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille.
Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.
Faire une marge sur chaque page.

Nom et prénom :

Classe et numéro :

1. Probabilités (9 points)

Une école publie un journal mensuel "STE-X Canard Magazine". 85% de tous les élèves de l'école lisent ce journal. Parmi ceux qui lisent le journal la proportion de filles est de 60 %, tandis que parmi ceux qui ne le lisent pas elle n'est que de 30%.

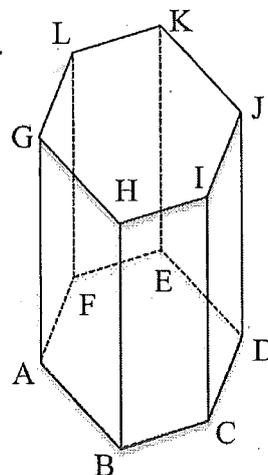
- Quelle est la proportion de filles dans cette école (en%) ?
- Parmi les garçons de l'école, quelle proportion ne lit pas le journal (en%) ?
- On choisit au hasard 10 élèves. Quelle est la probabilité que :
 - exactement 7 lisent le journal ?
 - au plus 8 lisent le journal ?
- On aimerait interroger des lecteurs pour évaluer la qualité du journal. En sélectionnant des élèves au hasard, combien doit-on en choisir pour en avoir au moins un qui lise le journal avec une probabilité supérieure à 99,9% ?
- Normalement le journal coûte 2 francs, mais les rédacteurs ont pensé quelque chose de spécial pour ce mois. Lorsque vous achetez le journal, vous devez lancer deux dés. Si l'un des dés affiche un 3 vous devez payer pour le journal la somme totale des deux dés (par exemple si les dés montrent trois et cinq, vous devez payer 8 francs pour le journal). Mais si aucun des deux dés ne montre un 3, alors vous obtenez le journal gratuitement.
 - Quelle est la probabilité d'obtenir le journal gratuitement ?
 - Quelle est la probabilité de le payer plus de 6 francs ?
 - Si on a tiré au moins un trois, quelle est la probabilité de le payer plus de 6 francs ?

2. Géométrie vectorielle (10 points)

La colonne droite ci-contre a deux bases hexagonales égales et parallèles. Les côtés d'une base sont 2 à 2 parallèles et de même longueur. La hauteur de la colonne (soit par exemple, l'arête FL) mesure $\sqrt{283} \approx 16,82$ cm. Les coordonnées des points suivants sont connues (en cm) :

$$A(3; 2; -3) \quad B(5; 8; 1) \quad C(-2; -1; 15) \quad D(-6; -10; 14) \\ F(-1; -7; -4)$$

- Calculer les coordonnées du sommet E .
- Les diagonales de la base hexagonale se coupent en leur milieu en un point M . Calculer les coordonnées du point M .
- Déterminer une équation cartésienne du plan de la base $ABCDEF$.
- Calculer les coordonnées du point G .



e) Jacques a calculé les angles $\alpha = \angle FAB$ et $\delta = \angle CDE$ de la base comme suit :

Calcul de l'angle $\alpha = \angle FAB$:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{FA} = \vec{OA} - \vec{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{FA}}{\|\vec{AB}\| \|\vec{FA}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+36+16} \cdot \sqrt{16+81+1}} = \frac{8+54+4}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{98}} = \frac{66}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{98}} \approx 0.89$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0.89) \approx 27.01^\circ$$

Calcul de l'angle $\delta = \angle CDE$:

$$\vec{DC} = \vec{OD} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{DE} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\delta) = \frac{\vec{DC} \cdot \vec{DE}}{\|\vec{DC}\| \|\vec{DE}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+81+1} \cdot \sqrt{4+36+16}} = \frac{-8-54-4}{\sqrt{98} \cdot \sqrt{56}} = \frac{-66}{\sqrt{98} \cdot \sqrt{56}} \approx -0.89$$

$$\delta = \cos^{-1}(-0.89) \approx 152.99^\circ$$

Vérifier si Jacques a calculé correctement ces deux angles.

Indiquer les erreurs et commenter-les brièvement.

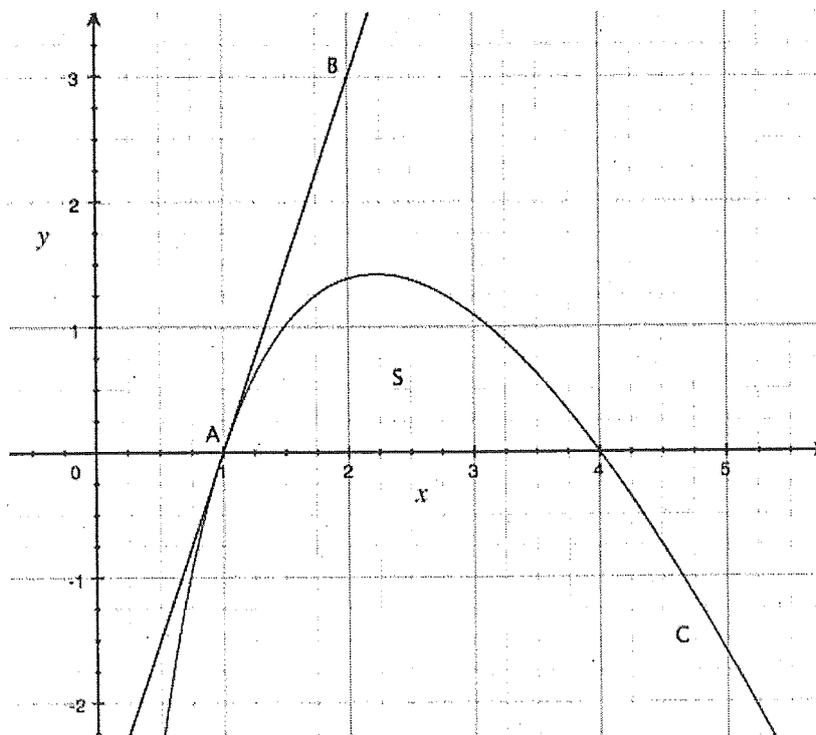
f) Comment Jacques aurait-il pu calculer ces deux angles avec moins d'effort ?

g) La droite d'équations paramétriques $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$ relie les points A et J et

la droite d'équations paramétriques $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 31 \\ -12 \end{pmatrix}$ relie les points E et H .

Ces deux droites se coupent-elles ? Si, oui calculer leur point d'intersection.

3. Analyse (6 points)



On considère la fonction $f(x)$ dont la courbe représentative C est donnée ci-dessus.

$f(x)$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

La courbe C passe par le point $A(1;0)$ et admet la droite (AB) comme tangente en A .

PARTIE A

Sur son domaine, $f(x) = (ax+b)\ln x$ où a et b sont deux constantes réelles.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Par lecture graphique, donner $f(4)$ et $f'(1)$.
3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équation suivant :
$$\begin{cases} 4a+b=0 \\ a+b=3 \end{cases}$$
4. Déterminer a et b .

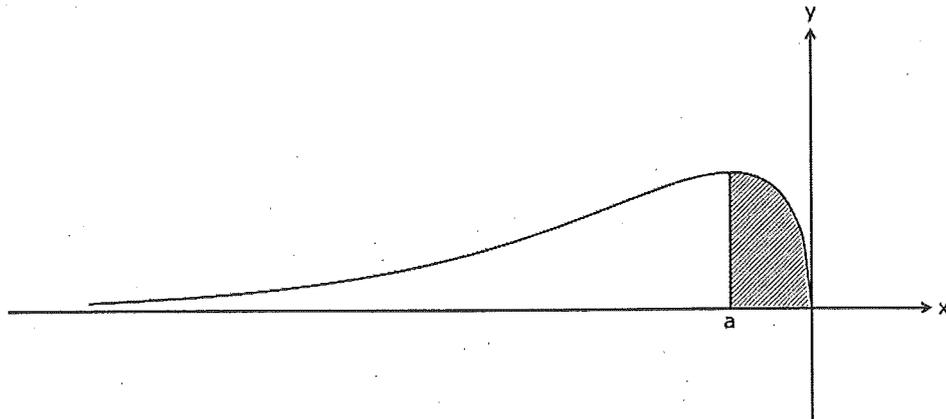
PARTIE B

On admet dorénavant que la fonction précédente est définie par $f(x) = (4-x)\ln x$. On appelle S l'aire entre la courbe C et l'axe des abscisses.

1. Soit $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} - 8x \ln x + 8x)$ une fonction définie sur $]0; +\infty[$.
Montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte de l'aire S .

4. Analyse (5 points)

On considère la fonction définie par $f(x) = 4\sqrt{-x \cdot e^x}$ et représentée graphiquement ci-dessous :



- La fonction f atteint un maximum en $x = a$. Déterminer le nombre a .
- Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la surface hachurée autour de l'axe des x . (Le calcul de la primitive est demandé).