MATHEMATIQUES

niveau II

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-83+
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.
Remarques :	Une présentation et une rédaction soignées sont exigées. Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail. Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille. Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille. Faire une marge sur chaque page.

Problème 1 (9 points)

Partie A

On considère les fonctions $f(x) = x^2 e^{-x}$ et $g(x) = 0,81 e^{-x}$ définies sur $\mathbb{R}$.

a) Etudier la croissance, les limites et le comportement asymptotique de $f(x)$. (La dérivée seconde n'est pas demandée).

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes associées à $f(x)$ et $g(x)$.

Partie B

On considère les fonctions :
$f(x)$ redéfinie sur l'intervalle $[-1; 4]$ et $g(x)$ redéfinie sur l'intervalle $[-0,9; 0,9]$.

La courbe de $g(x)$ représente le câble porteur d'un téléphérique reliant un village A au point d'abscisse $x = 0,9$ à la station supérieure B de l'installation au point d'abscisse $x = -0,9$.
La courbe de $f(x)$ représente le profil du terrain sous l'installation.
L'unité de longueur est le km et l'axe y donne l'altitude des points.

a) Représenter la situation.

b) Quelle est la pente moyenne (en %) entre le village et la station supérieure ?

c) Calculer l'altitude moyenne du câble.

Problème 2 (10 points)

Une agence de voyage propose deux durées de séjours – le week-end ou la semaine – et deux types de destinations – Suisse ou étranger –.

Parmi les dossiers de l'agence ou constate que :

- ◇ 40 % des séjours ont lieu en Suisse ;
- ◇ 70 % des séjours en Suisse durent une semaine ;
- ◇ 80 % des séjours à l'étranger durent une semaine.

On choisit un dossier au hasard et on note :

- ◇ S l'événement : « Le séjour a lieu en Suisse » ;
- ◇ L l'événement : « Le séjour dure une semaine » ;

a) Quelle est la probabilité qu'un séjour dure une semaine et ait lieu en Suisse ?

b) Calculer la probabilité qu'un séjour dure une semaine.

c) En déduire la probabilité qu'un séjour d'une semaine ait lieu en Suisse.

On choisit n dossiers au hasard et indépendamment les uns des autres et on s'intéresse au séjour choisi. On admettra que le nombre de dossiers est suffisamment grand pour que le choix d'un dossier soit assimilé à un tirage avec remise.

d) Quelle est la probabilité qu'un seul des séjours dure un week-end si on choisit 10 dossiers ?

e) Combien de dossiers faut-il choisir pour que la probabilité qu'au moins un séjour dure un week-end soit supérieure à 0,935 ?

L'agence traite 50 dossiers par semaine, établissant 1 dossier par personne. Un séjour en Suisse coûte en moyenne 500 francs par personne et un séjour à l'étranger coûte en moyenne 2 000 francs par personne. Soit X le chiffre d'affaire (= somme des coûts des séjours vendus) hebdomadaire de l'agence.

f) Calculer les probabilités
de X =25 000, X = 55 000 et X = 100 000

g) Calculer la moyenne et la variance pour un dossier ; en déduire le chiffre d'affaire hebdomadaire moyen de l'agence et son écart type.

h) Quelle est la probabilité que le chiffre d'affaire hebdomadaire de l'agence soit compris entre 70 000 et 80 000 francs ?

Problème 3 (9 points)

Une certaine espèce d'insectes passe, dans sa vie, par trois états : oeuf, larve et adulte. Chaque semaine, on observe que :

- ◇ Une moitié des oeufs de la semaine précédente meurent et chacun des autres donne naissance à une larve,
- ◇ les deux tiers des larves de la semaine précédente meurent et les autres deviennnent adultes,
- ◇ tous les adultes de la semaine précédente meurent après avoir pondu chacun six oeufs.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur correspondant à l'observation d'une semaine, où x est le nombre d'oeufs, y est le nombre de larves et z est le nombre d'adultes.

a) Déterminer la matrice M telle que $\vec{u'} = M \cdot \vec{u}$ donne les résultats de l'observation de la semaine suivante.

Pour la suite, on pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

b) 1) Calculer M^2 et M^3.

2) Que peut-on en déduire concernant la population totale des insectes x+y+z ?

3) Vérifier votre déduction en indiquant, semaine après semaine, l'évolution d'une population initiale de 600 oeufs, 600 larves et 600 adultes.

c) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme de matrice M.

d) Existe-t-il un type de population d'insectes stable d'une semaine à l'autre, c'est-à-dire pour laquelle le nombre d'oeufs, de larves et d'adultes est le même chaque semaine ?

Problème 4 (5 points)

Partie A

Soit les points $A(1;0;2), B(5;-4;0)$ et la droite

$$(\mathrm{D}) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \beta \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les points de la droite (D) desquels on voit le segment AB sous un angle droit.

Partie B

La courbe Φ est donnée par ses équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 10t^2 + t + 4 \\ y = -35t^2 - t - 4 \\ z = 5t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que cette courbe est plane.