ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Service de l´enseignement secondaire
du deuxième degré
Amt für Unterricht der Sekundarstufe 2

Collège Sainte-Croix
Kollegium Heilig Kreuz

Maturité 2011

Mathématiques

Niveau I

Durée de l'épreuve :		3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :		Formulaires et tables, Calculatrice TI-83+
Barème :		Points indiqués sur chaque problème.
Remarques :	Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.	
	Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.	
	Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.	
	Mettre vos nom et numéro sur chaque feuille.	
	Faire une marge sur chaque page.	

Direction de l'instruction publique, de la culture et du sport **DICS**
Direktion für Erziehung, Kultur und Sport **EKSD**

Problème 1 (12 points)

On considère sur $\mathbb{R}$, la fonction f définie par $f(x) = x(2x-3)e^x$.

a) Etudier le signe et la croissance de cette fonction.

b) Montrer que la tangente au graphe de f en $x = \frac{1}{2}$ passe par l'origine.

c) Montrer que $p(x) = (2x^2 - 7x + 7)e^x$ est une primitive de f.

d) Calculer l'aire de la région délimitée par le graphe de f, l'axe des x et les droites $x = -\frac{3}{2}$ et $x = 1$. Poser clairement le calcul !

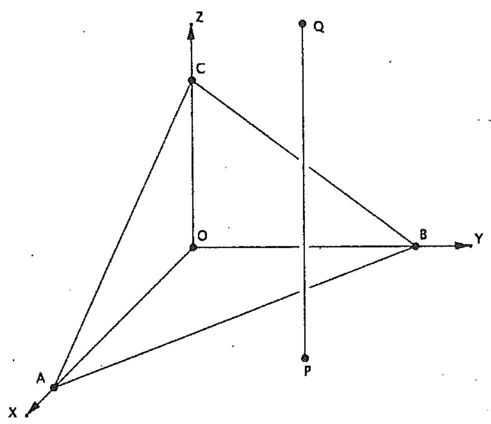
e) Soit a négatif. On considère la région délimitée par le graphe de f, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = 0$.
Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, la valeur de a pour que cette aire soit égale à 5. On donnera la valeur de a arrondie à 3 décimales.

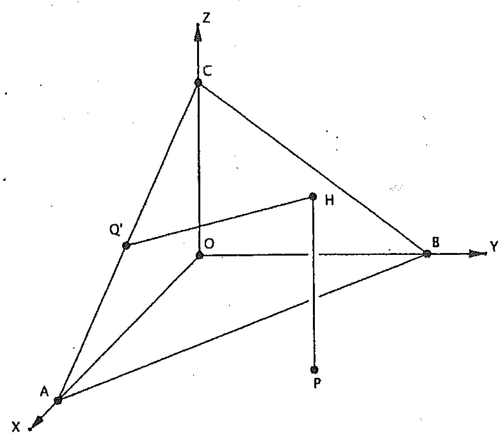
Problème 2 (10 points)

Dans un repère orthonormé, on considère le plan π d'équation $x + y + 2z - 8 = 0$ et le point $P(6; 4; 0)$.

a) Le plan π coupe l'axe des x en A, l'axe des y en B et l'axe des z en C.
Calculer les coordonnées de ces trois points.

Le plan π, dont le triangle ABC est une partie, représente, pour $z \geq 0$, le versant d'une colline.
Le point P est le pied d'un mât de transmission perpendiculaire au plan xy et d'une hauteur de 8 unités.





b) Donner les coordonnées du point Q, sommet du mât.

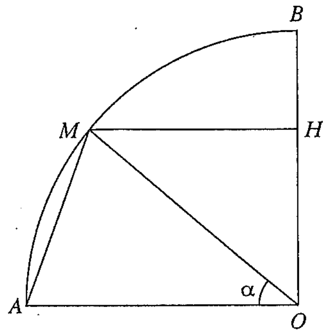
c) Calculer l'angle φ formé par le plan π et le plan xy.

d) Lors d'une tempête, le mât se plie au point $H(6; 4; h)$ et le sommet Q touche la colline au point $Q'(4; 0; 2)$.
Calculer à quelle hauteur le mât s'est plié.

e) On répare le mât et on le relie à la colline par un câble en acier. Une des extrémités du câble est fixée à mi-hauteur du mât en un point M et l'autre extrémité est fixée sur la colline en un point N de telle sorte que la longueur du câble soit la plus courte possible.
Calculer la longueur du câble et les coordonnées du point N.

Problème 3 (7 points)

On considère un quart de cercle de centre O et de rayon $OA = 5$. OB est le rayon perpendiculaire à OA. M est un point quelconque de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ et HM est perpendiculaire à OB.



a) Montrer que la longueur $AM + MH$ est donnée par la fonction $f(\alpha) = 10\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 5\cos(\alpha)$.

b) Calculer la dérivée de la fonction f.

c) En utilisant la relation $\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, déterminer la valeur de l'angle α qui maximalise la longueur $AM + MH$. Justifier cette valeur de α par le critère de la dérivée seconde.

Problème 4 (7 points)

Une agence de voyage propose deux durées de séjours – le week-end ou la semaine – et deux types de destinations – Suisse ou étranger –.

Parmi les dossiers de l'agence on constate que :

- 40 % des séjours ont lieu en Suisse ;
- 70 % des séjours en Suisse durent une semaine ;
- 80 % des séjours à l'étranger durent une semaine.

On choisit un dossier au hasard et on note :

- S l'événement : "Le séjour a lieu en Suisse" ;
- L l'événement : "Le séjour dure une semaine".

a) Faire un arbre pondéré de la situation.

b) Quelle est la probabilité qu'un séjour dure une semaine et ait lieu en Suisse ?

c) Calculer la probabilité qu'un séjour dure une semaine.

d) En déduire la probabilité qu'un séjour d'une semaine ait lieu en Suisse.

On choisit n dossiers au hasard et indépendamment les uns des autres et on s'intéresse au séjour choisi. On admettra que le nombre de dossiers est suffisamment grand pour que le choix d'un dossier soit assimilé à un tirage avec remise.

e) Quelle est la probabilité qu'un seul des séjours dure un week-end si on choisit 10 dossiers ?

f) Combien de dossiers faut-il choisir au minimum pour que la probabilité d'avoir au moins un séjour d'un week-end soit supérieure à 0,935 ?