Examen de maturité 2008
Collège Sainte-Croix
1700 FRIBOURG

# Mathématiques niveau renforcé

| | |
|---|---|
| Durée de l'épreuve : | 3 heures. |
| Ouvrage et matériel autorisés : | Formulaires et tables, calculatrice TI-83 Plus. |
| Barème : | Points indiqués sur chaque problème. |

Remarques : Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.

Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.

Faire une marge sur chaque page.

# Problème 1 (11 points)

### Partie I

Soient les plans :
$\pi_1$ d'équation : $2x - y + 2z + 3 = 0$ et $\pi_2$ d'équation : $6x + 2y - 3z - 4 = 0$.
Deux sphères $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ sont tangentes aux deux plans. Elles ont en commun le point de tangence $A(5, 9, -2)$ qui appartient au plan $\pi_1$.

Commencer par dessiner la situation en coupe, en traçant deux droites et deux cercles représentant respectivement les deux plans et les deux sphères.

i) Calculer les coordonnées du centre de chacune des sphères.

ii) Donner l'équation de la sphère dont les coordonnées du centre sont entières.

### Partie II

On donne le plan $\pi_3$ d'équation : $-x + 18y + 10z - 137 + 30\sqrt{17} = 0$.

Montrer que :

i) $\pi_3$ est perpendiculaire aux deux autres plans.

ii) $\pi_3$ est tangent à la sphère calculée dans la partie I, celle de centre $C(1, 11, -6)$.

# Problème 2 (7 points)

On considère l'espace vectoriel $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ des fonctions réelles.
On considère également $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f''(x) - 2f'(x) = 0\}$.

### Partie I

i) Montrer que $V$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

### Partie II

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = e^{\alpha x}$.

i) Déterminer les valeurs du paramètre $\alpha$ pour que $f$ appartienne à V.

ii) Donner une base de V. On ne demande pas de démonstration.

iii) Donner la forme générale d'un vecteur de V.

# Problème 3 (7 points)

Un jardinier dispose de deux lots $L_1$ et $L_2$ contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot $L_1$ donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot $L_2$ donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot puis plante 50 bulbes de tulipes de ce lot.
Soit $n$ un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.

On définit les événements suivants :

- $A$ : «le jardinier a choisi le lot $L_1$» ;
- $B$ : «le jardinier a choisi le lot $L_2$» ;
- $J_n$ : «le jardinier obtient $n$ tulipes jaunes».

Pour les questions i), ii), iii) et iv), on suppose que le jardinier choisit le lot $L_1$.

i) Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot $L_1$ ?

ii) Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

iii) Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne $n$ tulipes jaunes.

iv) Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera le résultat au millième près.

v) Calculer $p(J_n/B)$.

vi) Calculer la probabilité que le jardinier obtienne $n$ tulipes jaunes.

# Problème 4 (5 points)

Calculer l'aire entre les courbes représentatives des équations :

$$y = x - 2 \text{ et } 2x = (y-2)^2.$$