Examen de maturité 2008
Collège Sainte-Croix
1700 FRIBOURG

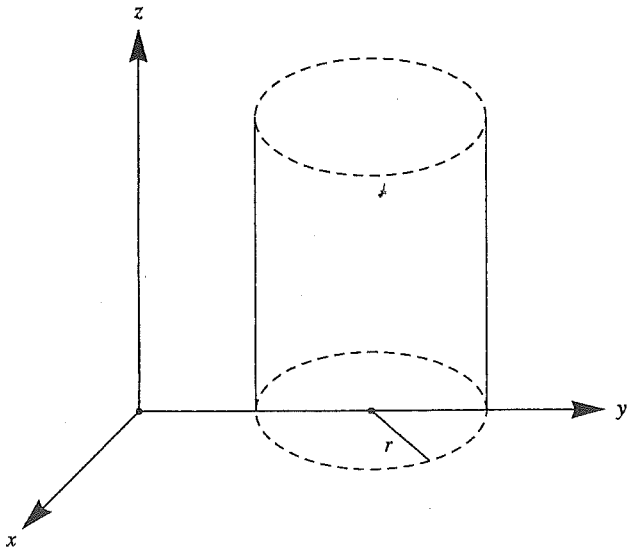
MATHEMATIQUES / niveau 1

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-83+
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.
Remarques :	Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.
	Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.
	Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.
	Mettre votre nom et numéro sur chaque feuille.
	Faire une marge sur chaque page.

Problème 1 / Géometrie vectorielle (9 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A



Le cylindre droit ci-dessus est caractérisé par son axe passant par le point $P(0;4;0)$ et parallèle à l'axe z et par son rayon $r = 2$.

1. Définir symboliquement ce cylindre.
2. Donner une représentation paramétrique de l'axe du cylindre.
3. Donner une représentation paramétrique de l'intersection du cylindre avec le plan yz.

Partie B

Soit le plan π_1 d'équation $2x + 2y + z - 18 = 0$ et le point $A(3;4;4)$.

1. Vérifier que le point A appartient bien au plan π_1.
2. Etablir les équations paramétriques de la droite d perpendiculaire à π_1 et passant par le point A.
3. Déterminer le point d'intersection I du plan π_2 d'équation $x + 4y - z - 6 = 0$ et de cette droite d.
4. Calculer l'angle formé par les plans π_1 et π_2, c'est-à-dire l'angle formé par leurs vecteurs normaux.
5. Déterminer les équations paramétriques de la droite d'intersection des plans π_1 et π_2.

Problème 2 / Probabilités (6 points)

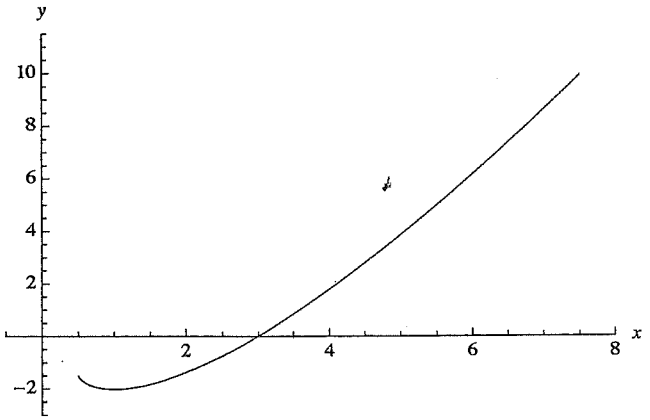
Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier fournit 70% de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième et le troisième producteur.
Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur seront emballées, les autres, dites "hors calibre", seront rejetées.
Il a été constaté que 20% des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5% des pommes fournies par le deuxième producteur sont hors calibre et 4% des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.

On appellera
- E_1 l'événement : « la pomme prélevée provient du premier producteur »,
- E_2 l'événement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur »,
- E_3 l'événement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur »,
- C l'événement : « la pomme prélevée a un bon calibre »,
- $\overline{C}$ l'événement : « la pomme prélevée est hors calibre ».

1. Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de bon calibre ou hors calibre.
   a) Traduire la situation de l'exercice par un arbre pondéré.
   b) Calculer la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur.
   c) Calculer la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre.
   d) La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ». Quel calcul permet de justifier cette affirmation ? Faire ce calcul et conclure.
2. Le contrôleur choisit maintenant au hasard et de façon indépendante quatre pommes.
   a) Quelle est la probabilité que trois pommes exactement sur les quatre prélevées aient le bon calibre ?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'une pomme prélevée au moins soit hors calibre ?

Problème 3 / Analyse (10 points)

1. La courbe ci-dessous représente une fonction F définie et dérivable sur l'intervalle $J =]0,5; +\infty[$. On sait que la courbe coupe l'axe des abscisses au point $(3;0)$ et a une tangente horizontale au point $(1;-2)$. On note f la dérivée de F.



a) A l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.

b) Donner $f(1)$, $F(1)$, $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.

c) Calculer $\int_1^3 f(x)\,dx$

2. Trois fonctions f_1, f_2 et f_3 sont définies sur l'intervalle J par :

$$f_1(x) = (x^2 - x + 1)e^{2x-1}\,;\; f_2(x) = ln(2x-1) \text{ et } f_3(x) = -1 + \frac{1}{2x-1}$$

Une de ces trois fonctions est la fonction f.

a) Etudier le signe de f_1 sur J.

b) Résoudre l'équation $f_2(x) = 0$ sur l'intervalle J.

c) Calculer $f_3(1)$.

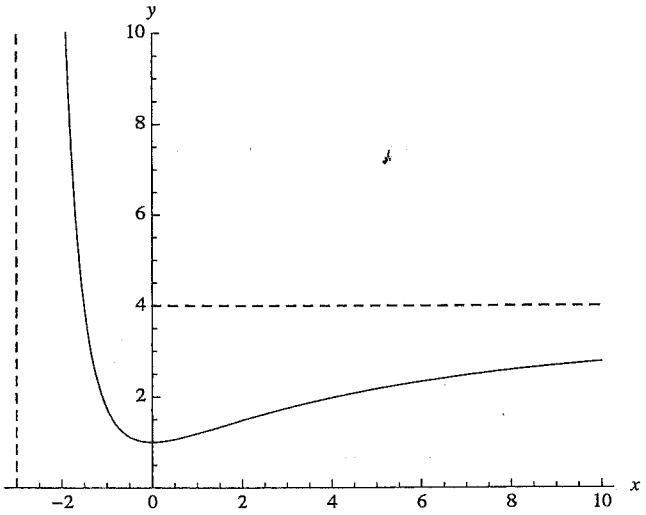
d) Calculer $\int_1^3 f_3(x)\,dx$.

e) En déduire la fonction f.

3. Déterminer une primitive de la fonction $f_1(x) = (x^2 - x + 1)e^{2x-1}$.

Problème 4 / Analyse (7 points)

La courbe donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3;+\infty[$. On sait que le point A de coordonnées $(0;1)$ appartient à cette courbe et que la fonction f admet un minimum pour $x = 0$. En outre, les droites d'équations $y = 4$ et $x = -3$ sont asymptotes de cette courbe.



Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Une réponse correcte rapporte un point, une réponse fausse enlève un point et l'absence de réponse compte pour zéro point. Si le total des points est négatif, on attribue zéro point au problème. Les réponses n'ont pas besoin d'être justifiées.

1. La limite de la fonction f en $+\infty$ est :	a) $+\infty$ b) -3 c) $+4$
2. On note f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-3;+\infty[$	a) $f'(0) = 1$ b) $f'(1) = 0$ c) $f'(0) = 0$
3. L'équation de la tangente à la courbe au point $A(0;1)$ est :	a) $y = 1$ b) $y = x$ c) $y = 0$
4. Sur l'intervalle $]-3;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$	a) n'admet aucune solution b) admet comme solution unique $x = 0$ c) admet une solution unique dans l'intervalle $[1;2]$
5. L'intégrale $\int_0^4 f(x)\,dx$	a) est négative b) est comprise entre 0 et 4 c) est comprise entre 4 et 8

Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction g définie par $g(x) = ln(f(x))$ sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.

6. Si $x = 0$, alors	a) on ne peut pas calculer $g(x)$ b) $g(x) = 1$ c) $g(x) = 0$
7. On peut affirmer que sur l'intervalle $]-3;+\infty[$	a) g a les mêmes variations que la fonction ln(x) b) g a les mêmes variations que la fonction f c) g a les variations inverses de celles de la fonction f