Examen de maturité 2007
Collège Sainte-Croix
1700 FRIBOURG

MATHEMATIQUES / niveau 2

Durée de l'épreuve :	3 heures.
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables, Calculatrice TI-83 Plus ou HP38G.
Barème :	Points indiqués sur chaque problème.

Remarques : Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.
Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.
Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.
Mettre votre nom et votre numéro sur chaque feuille.
Faire une marge sur chaque page.

Problème1 / Analyse (18 points)

1) Etudier et représenter la fonction $f(x) = \ln\left(5 \cdot \frac{|x-5|}{x+5}\right)$. Soit f la courbe de f(x).

   La dérivée seconde est demandée.

2) Vérifier que $F(x) = x \cdot \ln 5 + (x-5) \cdot \ln|x-5| - (x+5) \cdot \ln(x+5)$ est une primitive de f(x).

3) Déterminer l'aire du domaine borné par f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = 1$.

4) Quelle est l'équation de la tangente à f en son point d'inflexion ?

5) Sous quel angle aigu f coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?

Problème2 / Algèbre linéaire (10 points)

On considère un endomorphisme h de R^3 dont la matrice relativement à la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Relativement à B :

1) Déterminer le sous-espace E_1 des invariants de h.

2) Déterminer l'équation caractéristique de h.

3) Déterminer les sous-espaces propres E_λ associés aux valeurs propres $\lambda = 1$ et $\lambda = -2$.

4) Donner une base B′ de R^3 issue des sous-espaces propres de h.

Relativement à la base B′ :

5) Donner la matrice H′ de h.

Soit $B'' = \{(1,0,-1), (1,4,1), (2,-1,2)\}$ une famille de 3 vecteurs exprimés dans B.

6) Montrer que B″ est une base orthogonale de R^3.

7) Déterminer la matrice H″ de h relativement à B″.

Problème 3 / Probabilités (10 points)

Partie A

Dans un quartier très fréquenté, les automobilistes qui désirent se garer doivent soit louer une place de stationnement ou prendre le risque d'être en stationnement interdit. Un particulier estime qu'il a 10% de chance d'être amendé chaque fois qu'il est en stationnement interdit. Il vient 20 fois par mois dans ce quartier.

En un mois, s'il est toujours en stationnement interdit :

1) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas amendé ?

2) Combien de fois en moyenne risque-t-il d'être amendé ? Calculer aussi l'écart-type associé à cette moyenne.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de contraventions qu'il risque d'avoir en un mois.

3) Donner la loi de probabilité de X. (Ne donner les valeurs des probabilités que pour $0 \leq X \leq 5$ mais avec 3 décimales).

4) Quelle est la probabilité d'être amendé plus de 5 fois ?

Comme la contravention est de 50.– par infraction et que la place de parc se loue 300.– par mois, après réflexion, il décide de ne pas louer de place de parc et de stationner systématiquement en infraction.

5) Si son estimation des contrôles de police est juste, d'après vos réponses aux points 1 à 4, que penser de son choix ?

Partie B

On estime que les hauteurs de camions non chargés se répartissent selon une loi normale de moyenne 3,5 m et d'écart-type 0,5 m.

6) Quelle doit être la hauteur de l'entrée d'un garage public pour que 98% des camions non chargés puissent y entrer, sachant qu'il faut 2 cm de marge entre le toit du camion et le haut de l'entrée du garage ?

En moyenne, 80% des camions sont chargés et la hauteur d'un camion chargé suit une loi normale de moyenne 3,4 m et d'écart-type 0,5 m.

7) Quelle doit être la hauteur de l'entrée du garage public pour que 98% des camions, chargés et non chargés, puissent y entrer, sachant qu'il faut toujours 2 cm de marge entre le toit du camion et le haut de l'entrée du garage ?

Problème4 / Géométrie (12 points)

Dans l'espace affine R^3, on considère :

le plan Π d'équation $x-2y+z+16=0$,

les droites δ d'équations $\begin{cases} x= & 1+2k \\ y= & 2-3k \\ z= & 5k \end{cases}$ et α d'équations $\begin{cases} x=k \\ y=k \\ z=k \end{cases}$,

et la sphère Σ de centre $\Omega=(1,5,-3)$ et de rayon 4,

1) Déterminer les équations paramétriques de l'image δ' de la droite δ par la projection **p** de direction $\vec{p}=(3,11,6)$ sur le plan Π.

2) Déterminer l'équation cartésienne de l'image Σ' de la sphère Σ par une rotation **r** d'axe α et d'angle 60°.