Examen de maturité 2007
Collège Sainte-Croix
1700 FRIBOURG

MATHEMATIQUES / niveau 1

Durée de l'épreuve :	3 heures
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables Calculatrices graphiques TI-83 Plus et HP38G
Barème :	Points indiqués sur chaque problème

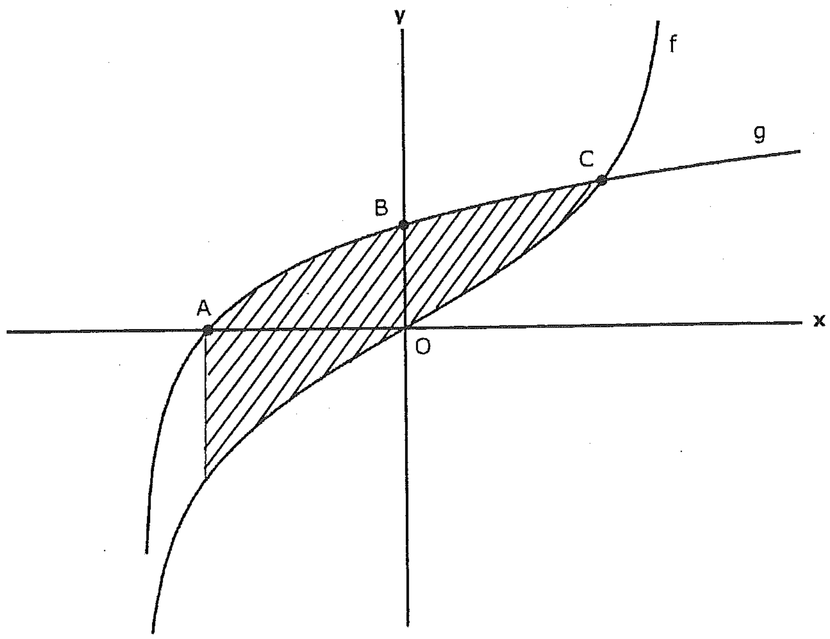
Remarques :
Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.
Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.
Chaque problème doit être rédigé sur une nouvelle feuille.
Mettre votre nom et votre numéro sur chaque feuille.
Faire une marge sur chaque page.
Rendre la page 1 avec votre travail.

Nom et prénom : ....

Classe et No : ....

Problème 1 (14 points)

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(4+x) - \ln(4-x)$ et $g(x) = \ln(4+x)$, représentées graphiquement ci-dessous :



a) Donner le domaine de définition D_f de la fonction f et le domaine de définition D_g de la fonction g. Justifier.

b) Calculer les zéros de f et de g.

c) Prouver que f est une fonction impaire.

d) Prouver que f est croissante sur son domaine de définition.

e) Soit la fonction K définie sur $D_f \cap D_g$ par $K(x) = -x - (4-x)\ln(4-x)$.
Démontrer que sur $D_f \cap D_g$ la fonction K est une primitive de la fonction $g - f$.

f) Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface hachurée.

g) On considère la surface OAB délimitée par l'arc AB, l'axe Ox et l'axe Oy.
Calculer le volume du solide engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe Oy.
On exige le calcul de la primitive.

Problème 2 (12 points)

Dans une même nuit, les polices cantonales ont contrôlé les véhicules occupés par deux personnes. La collecte des informations a permis de constituer la statistique suivante:

- *11%* des conducteurs avaient un taux d'alcoolémie dépassant le 0,5‰.
- Parmi ces conducteurs au taux supérieur à 0,5‰, *20%* avaient à leur côté un passager dont le taux d'alcool était supérieur au 0,5‰.
- Parmi les conducteurs au taux inférieur ou égal à 0,5‰, seuls *6%* avaient un passager qui dépassait le taux.

La police effectue des contrôles au hasard pour améliorer la sécurité routière.

On appelle:

A l'événement: « *le conducteur présente un taux d'alcoolémie inférieur ou égal au 0,5‰* ».

B l'événement: « *le passager présente un taux d'alcoolémie inférieur ou égal au 0,5‰* ».

1. Calculer la probabilité de l'événement A et de l'événement B.

2. a) Calculer la probabilité que le chauffeur et le passager aient des taux dépassant le 0,5‰.
   b) Calculer la probabilité que seul le passager dépasse le 0,5‰.
   c) Calculer la probabilité que le passager dépasse le 0,5‰.

3. Le passager a un taux dépassant la limite de 0,5‰.
   Quelle est la probabilité que le taux du conducteur dépasse le 0,5‰ ?

4. a) Déterminer la probabilité que le chauffeur et le passager aient tous les deux un taux inférieur ou égal au 0,5‰.
   b) La police a contrôlé *10* véhicules.
   Quelle est la probabilité qu'il y ait parmi ces véhicules au moins un dont le chauffeur ou le passager (ou les deux) dépassent le taux de 0,5‰ ?
   c) Combien de véhicules la police doit-elle contrôler pour que la probabilité que le chauffeur ou le passager (ou les deux) dépassent le taux, soit supérieure à *99%* ?

Problème 3 (7 points)

La population $N(t)$, en milliers d'habitants, d'une grande ville a varié entre 1990 et 2005 selon la formule $N(t) = 136 \cdot e^{0,05 \cdot t}$, où t est le nombre d'années à partir du 1.01.1990.

a) Quelle est la population au début de 1990 (le 01.01.1990) ? et au début de 2006 ?

b) Combien de temps faut-il à cette population pour tripler ?

c) Calculer le taux de variation instantané de cette population.
Que vaut-il au début de 2000 ?

d) Quel est le taux de variation moyen de cette population durant l'année 1990 ?

e) Quel est en % le taux de croissance annuel de cette population ?

Problème 4 (10 points)

On plie dans le sens de la longueur, en trois parties égales, une feuille de papier rectangulaire de format A4 (21,0 cm x 29,7 cm). Le rectangle du milieu reste posé sur la table. Les deux autres rectangles sont inclinés du même angle x $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ par rapport à la table (figure 1). On obtient ainsi un prisme droit qui a comme base le trapèze $ABCD$ (figure 2).

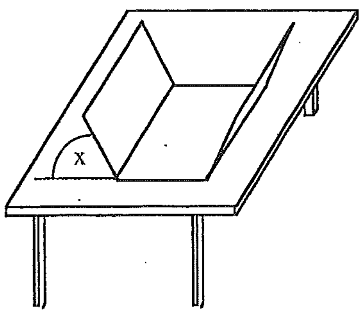


Figure 1

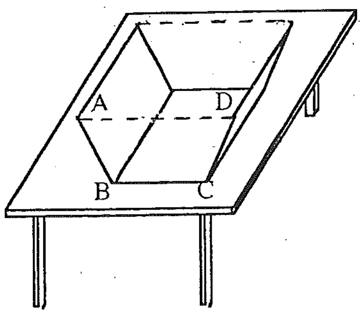


Figure 2

a) Démontrer que l'aire $A(x)$ du trapèze $ABCD$ vaut $49 \cdot (1+\cos(x)) \cdot \sin(x)$ $[\text{cm}^2]$.

b) En déduire que le volume $V(x)$ du prisme vaut $1455,3 \cdot (1+\cos(x)) \cdot \sin(x)$ $[\text{cm}^3]$.

c) A l'aide de votre calculatrice, trouver pour quelle valeur de x, le volume est maximal.

d) Trouver de manière mathématique la valeur de x pour avoir un volume maximal.