Baccalauréat 2006
Collège Sainte-Croix
1700 FRIBOURG

MATHEMATIQUES
Niveau II

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	Table numérique Calculatrice graphique
Nombre de pages :	4 pages

Remarques :
- *Une présentation claire, des réponses justifiées, adaptées aux problèmes, sont exigées pour avoir la note maximum.*
- *Chaque problème est à rédiger sur une nouvelle double-feuille.*
- *Numéroter et mettre votre nom sur chaque feuille.*
- *Faire une marge sur chaque feuille.*
- *Rendre la page 1 avec votre travail*

Merci
Bon travail

Nom et prénom : ....

Classe et No. : ....

Barème

Problème 1	*Problème 2*	*Problème 3*	*Problème 4*
12 points	*7 points*	*14 points*	*13 points*

Problème 1 *(12 points)*

Analyse

Soit f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x) = x+1-2\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

et sa courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que la première dérivée $f'(x)$ vaut

$$f'(x) = 1+\frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}.$$

b) En déduire le tableau de variations de f.

c) Calculer la limite de f pour $x \to +\infty$.

d) Montrer que la doite (D) d'équation y = x+1 est asymptote de à la courbe (C) pour $x \to +\infty$.

e) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

f) Trouver l'équation de la demi-droite (T) tangente au point O.

g) Esquisser (D), (T) et (C) sur l'intervalle [0 ;2] (avec 6 carrés pour les unités).

h) On considère l'aire A(t) définie par l'axe des y, la courbe (C), l'asymptote oblique (D) et la droite d'équation x=t. Calculer l'aire A(t) pour t $\to +\infty$. Cette aire est-elle finie ?

Problème 2 *(7 points)*

Géométrie

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne

- la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y - 12z + 32 = 0$
- les droites (d) $\begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = 8+4k \end{cases}$ k $\in IR$ et (a) $\begin{cases} x = 4 \\ z = 6 \end{cases}$
- le plan (P) $x - y + z - 5 = 0$
- le point A(0 ; 3 ; -1).

a) Trouver le centre Ω et le rayon R de la sphère (S).

b) Caractériser l'intersection de (S) avec le plan xOy.

c) Soit l'axe d'un cylindre défini par la droite (a).

  i) Monter que (d) et (a) sont gauches.

  ii) Donner l'équation du cylindre sachant qu'il est tangent à (d).

Problème 3 *(14 points)*

Algèbre linéaire : calculs à la machine autorisés.

Soit IR^3 muni d'une base standard $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ relativement à B.

Partie A

a) Montrer que B' = $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forme une base de IR^3.

b) Poser un système pour calculer les composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de $\vec{d}$ dans la base B'.

c) Calculer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Partie B

Soit M la matrice d'un endomorphisme f de IR^3 définie par M = (1/3)·P où P matrice de passage de la base B à la base B' données ci-dessus.

d) Montrer que $f(\vec{u}) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}x + 2y - \frac{2}{3}z \\ -\frac{4}{3}x - y + \frac{2}{3}z \\ \frac{8}{3}x + 4y - \frac{1}{3}z \end{pmatrix}$.

e) Calculer M^2.

f) En déduire, sans calcul, la matrice inverse M^{-1}.

g) Définir et caractériser l'ensemble I des vecteurs invariants par f.

h) Définir et caractériser l'ensemble $J = \left\{ \vec{u} \in IR^3 \mid f(\vec{u}) = -\vec{u} \right\}$.

i) En déduire la nature géométrique et les caractéristiques de l'application f.

j) Donner (sans calcul supplémentaire) la matrice M' de f dans une base $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, réunion des vecteurs de I et J.

Problème 4 *(13 points)*

Probabilités

Une urne contient 60 boules blanches et 40 boules noires.

Indication : les réponses seront données en fonction des fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$.

Partie A

Dans cette partie, on effectue dans cette boîte au plus quatre tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrête à l'obtention d'une boule blanche.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Par convention, X est égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les quatre tirages.

a) Dessiner un arbre pondéré représentant la situation.

b) Calculer la probabilité que X soit égal à 0.

c) Calculer la probabilité que X soit égal à k, k valant successivement 1, 2 , 3 ou 4.

d) Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X.

Partie B

Dans cette partie, on procèdera à n tirages au maximum avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrête à l'obtention d'une boule blanche. Soit X la variable aléatoire définie comme en A et de même X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les n tirages.

e) Donner la probabilité pour que X soit égal à k, k variant de 1 à n.

f) On considère le polynôme P tel que $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots\dots\dots + nx^{n-1}$.

Soit E(X) l'espérance de la variable aléatoire X.

Montrer que $E(X) = \frac{3}{5}P(\frac{2}{5})$.

g) On sait que pour tout réel x différent de 1, on a :

$$1 + x + x^2 + \dots\dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

i) En dérivant les deux termes de l'égalité précédente, en déduire une autre expression de

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots\dots\dots + nx^{n-1}.$$

ii) En déduire que $E(X) = \frac{5}{3}\left(n\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{n} + 1\right)$.