COLLÈGE SAINTE-CROIX
1700 FRIBOURG

MATURITÉ 2005
DURÉE: 3 HEURES

# MATHÉMATIQUES (niveau II)

- Résoudre dans un ordre quelconque les quatre problèmes donnés ci-après. Pour chaque problème, utiliser une nouvelle double feuille différente.
- Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.
- Sauf indication spéciale, les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

## Problème 1 (10 points)

On considère le plan $\pi$ d'équation $2x - y + 2z + 20 = 0$ et deux sphères $S_1$ et $S_2$.

$S_1$ : $(x-7)^2 + (y-7)^2 + (z-8)^2 = 36$

$S_2$ : $x^2 + y^2 + z^2 + 22x + 16y + 8z + 120 = 0$

On note $C_1$ le centre de la sphère $S_1$ et $r_1$ son rayon. De même, on note $C_2$ le centre de la sphère $S_2$ et $r_2$ son rayon.

a) Déterminer le centre et le rayon de chaque sphère.

b) Déterminer l'équation cartésienne du plan $\alpha$ parallèle au plan $\pi$ et tangent aux deux sphères.

c) Calculer la longueur du segment reliant les deux points de tangence de $\alpha$ avec les sphères.

d) Les sphères $S_1$ et $S_2$ sont-elles du même côté du plan $\alpha$ ? Justifier.

**Problème 2** (10 points)

(A résoudre sur une nouvelle double page)

Soit la courbe $(C)$ définie par $y^2 = x^4 \cdot (x+4)$ avec $-4 \leq x \leq 1$.

Cette courbe $(C)$ peut être considérée comme la réunion de la représentation graphique de deux fonctions $f_1$ et $f_2$ ; on sait que $f_1(x) \geq 0$ et $f_2(x) \leq 0$.

a) Calculer les coordonnées $(x, f_1(x))$ du point P de la courbe pour lequel la valeur $f_1(x)$ est maximale.

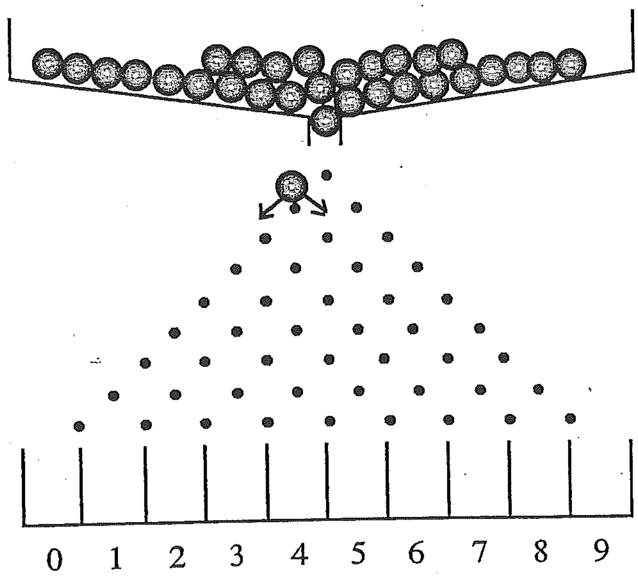
b) Calculer l'aire de la surface déterminée par la courbe $(C)$, $(-4 \leq x \leq 0)$.

c) Par translation du graphe de $f_2$ de une unité vers le bas, on obtient une nouvelle courbe $(D)$.
Par révolution autour de l'axe des x, cette courbe $(D)$ engendre, entre $x = -4$ et $x = 1$, un volume en forme de fiole.
Calculer le volume de la fiole.(Poser les calculs; le résultat numérique est donné par la calculatrice).

## Problème 3 (10 points)

(A résoudre sur une nouvelle double page)

La planche de Galton est une planche bien lisse avec en haut un réservoir contenant des billes. Des rangées de clous disposés en quinconce servent de butoir à une bille introduite par le haut.
La bille parcourt cette pyramide de clous en heurtant obligatoirement un clou à chaque rangée horizontale et elle termine sa course dans une des boîtes du bas de la planche.
Chaque fois qu'une bille tape un clou, elle a une chance sur deux de tomber d'un côté ou de l'autre. Elle a donc la même probabilité $(p = 0.5)$ de continuer sa chute à gauche ou à droite.




**PARTIE A**

Le numéro de chaque case où arrive la bille est une valeur de la variable aléatoire $X$.
Cette variable aléatoire prend donc ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, ..., 9\}$.
Il s'agit de déterminer la distribution de la variable aléatoire X en effectuant les travaux suivants:

a) Tracer, sur le dessin ci-dessus, quatre trajets différents d'une bille aboutissant dans la boîte 3.

b) On désigne les directions que prend la bille après avoir heurté un clou de la planche de Galton par les lettres:

G, si la boule part à gauche et D, si la boule part à droite.

Décrire avec ces deux lettres chacun des trajets dessinés en a).

c) Établir une table donnant la distribution de la variable aléatoire $X$.

d) Quelle loi cette variable $X$ suit-elle ? Quels sont ses paramètres ?

e) Si on lâche mille billes, quel est l'effectif théorique de chaque boîte ?

**PARTIE B**

On suppose maintenant que la planche de Galton compte 25 rangées de clous et 26 boîtes.
Le numéro de chaque case où arrive la bille est une valeur de la nouvelle variable aléatoire $Y$.
Cette variable aléatoire prend donc ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, ..., 25\}$.

f) Calculer l'espérance $E(Y)$ et l'écart-type $\sigma$.

g) Calculer probabilité $P(8 \leq Y \leq 15)$ (On se limite à poser les calculs).

h) A-t-on les conditions qui permettent d'obtenir une approximation de cette probabilité avec une loi normale ? Si oui, quelle loi normale faut-il utiliser ?

Quelle est alors l'approximation de $P(8 \leq Y \leq 15)$?