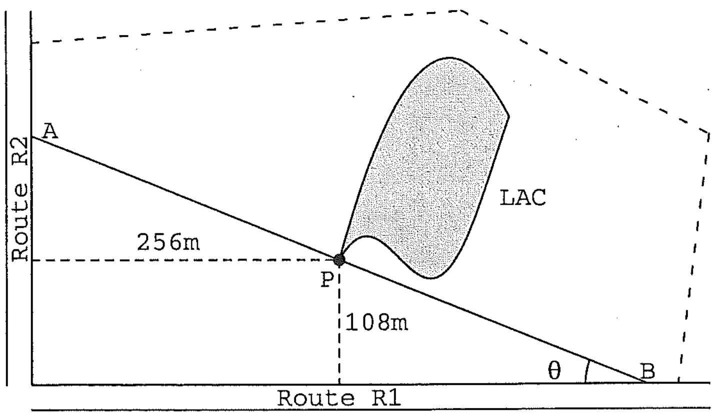
Collège Ste Croix
1700 Fribourg

Maturité 2005
Durée: 3 heures

Mathématiques I

Pour chaque problème utiliser une nouvelle double feuille. Une présentation et une rédaction soignées sont exigées. Les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

Problème 1 **(10 points)**



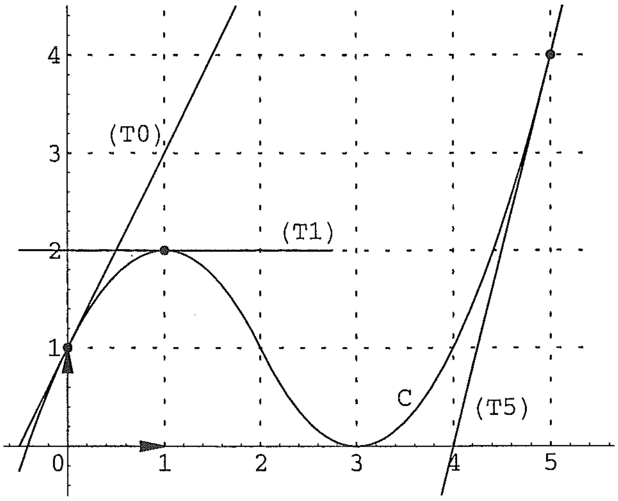
Un terrain a deux côtés rectilignes adjacents aux routes perpendiculaires R1 et R2.
Dans le terrain se trouve un lac dont l'extrémité P se situe à 256 m de la route R2 et à 108 m de la route R1.
On se propose de construire un chemin rectiligne AB qui coupe le terrain d'une route à l'autre et qui passe par l'extrémité P du lac.

a) Exprimer la longueur $s(\theta)$ du chemin $AB = AP + PB$ en fonction de l'angle θ.

b) Déterminer la longueur du chemin le plus court.

Problème 2 **(11 points)**

La courbe *C* donnée dans la figure ci-dessous représente une fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle [-0,5 ; 5,2]. Cette courbe est tracée dans un repère orthonormé. On a représenté également les tangentes (T_0), (T_1) et (T_5) aux points d'abscisses respectives 0, 1 et 5.



Partie A

Dans cette partie, les réponses seront obtenues par lecture graphique.

a) Déterminer les valeurs de f(0), f(1), f(3) et f(5).
b) Déterminer les valeurs de f '(0), f '(1) et f '(5).
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Soit $I = \int_0^3 f(x)dx$. D'après le graphique, parmi les propositions suivantes laquelle est correcte ? (Expliquer) a) $2 \leq I \leq 3$ b) $3 \leq I \leq 4$ c) $4 \leq I \leq 5$

Partie B

Sur l'intervalle [0, 3[on considère la fonction $g(x) = \ln(f(x))$, dans laquelle f(x) est la fonction définie ci-dessus.

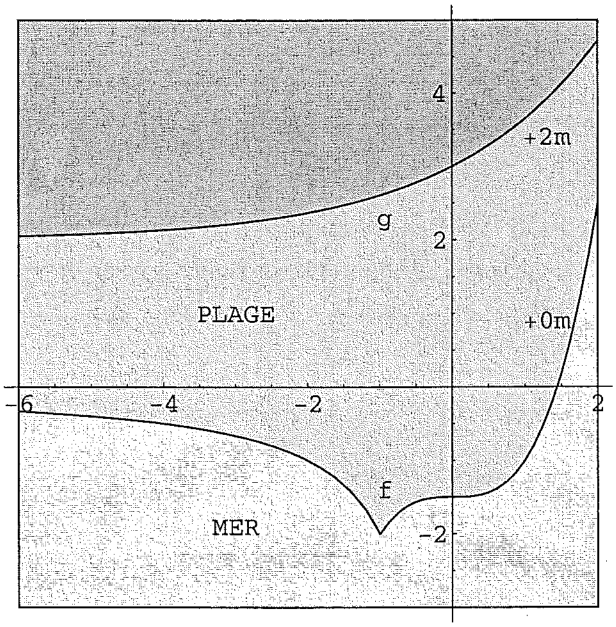
e) Donner les valeurs de g(0) et de g(1).
f) Déterminer la limite de g(x) quand $x \to 3^-$.
g) Déterminer les zéros de g(x).
h) Déterminer les valeurs de g'(0) et g'(1).
i) Dresser le tableau de variation de g(x).
j) Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, proposer un tracé de courbe représentant g en tenant compte des résultats de la partie B.

Problème 3 **(6 points)**

La carte ci-dessous indique des courbes de niveau sur une plage.
L'unité de la carte est le km.
La courbe de niveau 0 m est donnée par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 2/x & \text{pour } -6 < x \leq -1 \\ (x^3 - 3)/2 & \text{pour } -1 < x < 2 \end{cases};$$

La courbe de niveau +2 m est donnée par la fonction $g(x) = 2 + e^{(x/2)}$.



À marée basse, le niveau de l'eau est de 0 m et à marée haute de +2 m.

Quelle est la surface de plage qui est inondée entre marée basse et marée haute ? (Primitive exigée)

Problème 4 **(10 points)**

Une usine fabrique des moteurs électriques. Ces moteurs peuvent présenter deux types de défauts :

- Défaut M de nature mécanique
- Défaut E de nature électrique

Un moteur est déclaré en parfait état de marche s'il ne présente aucun des deux défauts.

1. On prélève un lot de 200 moteurs sur la production et l'on constate que :
   - Le défaut M est observé sur 16 moteurs ;
   - Le défaut E est observé sur 12 moteurs ;
   - 180 moteurs sont déclarés en parfait état de marche.

   Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	Avec le défaut E	Sans le défaut E	Total
Avec le défaut M			
Sans le défaut M			
Total			200

On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le tableau, reflète celle de l'ensemble de la production.

2. Le coût de fabrication d'un moteur est 600 Frs. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant selon les tarifs suivants :
   - 100 Frs pour réparer le seul défaut M ;
   - 130 Frs pour réparer le seul défaut E ;
   - 210 Frs pour réparer les deux défauts M et E.

   On note X la variable aléatoire qui, à chaque moteur choisi au hasard dans la production, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté éventuellement des frais de réparation.

   a) Justifier que X prend les valeurs suivantes : 600, 700, 730, 810.
   b) Montrer que la probabilité que X prenne la valeur 600 est 0,9.
   c) Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra présenter les résultats dans un tableau.
   d) Calculer l'espérance mathématique E(x) de la variable aléatoire X. Que représente E(X) pour l'usine ?
   e) On admet que tous les moteurs produits sont vendus. En tenant compte des réparations à effectuer, l'usine espère réaliser un bénéfice de 25'200 Frs en vendant 300 moteurs. Quel sera le prix de vente d'un moteur ?

Problème 5 **(6 points)**

Les elfes des forêts du canton de Fribourg vivent moins de 24 mois ! Le dernier recensement de leur communauté vieillissante donne leurs âges, en mois, de façon suivante :

Âge en mois	1	2	3	4	6	8	9	10	11	13	14	17	18	20	22
Nombre d'elfes	2	3	1	1	2	5	6	1	9	18	20	18	8	4	2

Répondre aux questions ci-dessous sur la feuille en annexe.

a) Quel est l'âge moyen d'un elfe ? (Machine autorisée)

b) Quel est le pourcentage d'elfes dont l'âge au dernier recensement est inférieur ou égal à 12 mois ?

c) Regrouper ces données en classes de largeur 4 (mois).

d) Établir le polygone des fréquences cumulées.

e) Noter sur le graphique la médiane et les quartiles.

f) Calculer la médiane par interpolation linéaire. (Donner le calcul en détail)

Annexe au problème 5 à rendre.

Nom et prénom : ______________________ **Classe :** __________

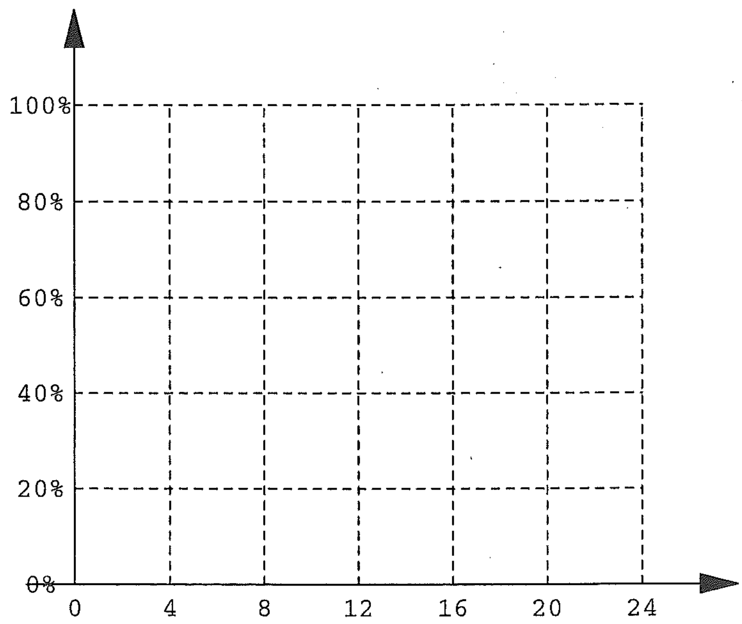
a) Âge moyen de la communauté elfique : ☐

b) Pourcentage d'elfes dont l'âge au dernier recensement est inférieur ou égal à 12 mois : ☐

c) Compléter le tableau ci-dessous :

Classes	Effectifs	Fréquences cumulées (%)
[0 ; 4 [		

d)+e) Polygone des fréquences cumulées :



f) Calcul : ______________________

Médiane : ☐