

Mathématiques

Tables numériques et calculatrice graphique à disposition.

Chaque problème est à rédiger sur une nouvelle feuille.

Une présentation claire, des réponses justifiées, précises, adaptées aux problèmes sont exigées pour obtenir la note maximale.

Sauf indication spéciale, les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

Problème 1 (16 points)

On résoudra la première partie avant la deuxième.

1^{ère} partie

On considère l'ensemble des points de l'espace, son repère orthonormé direct d'origine O et la base associée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$.

Soit les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

On considère la symétrie orthogonale f de plan π . Par cette symétrie,

$A(1; 0; 0)$ a pour image $A' \left(\frac{1}{9}; -\frac{8}{9}; -\frac{4}{9} \right)$ et $B(0;1;0)$ a pour image $B' \left(-\frac{8}{9}; \frac{1}{9}; -\frac{4}{9} \right)$.

- Donner l'équation du plan π
- Calculer les coordonnées de C' , image de C par cette symétrie.
- Deux sphères de rayon $r = 6$ sont tangentes au plan π en $T(1; 2; -6)$.
Calculer les coordonnées de leur centre respectif Ω_1 et Ω_2 .

2^{ème} partie

Soit l'espace vectoriel $/R^3$ et sa base canonique.

- Calculer la matrice de la symétrie f de $/R^3$ dans $/R^3$, définie dans la 1^{ère} partie, relativement à la base canonique.
- Tester votre matrice en recalculant les coordonnées de Ω_2 à partir de celles de Ω_1 obtenues sous c).
- Vérifier que les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base de $/R^3$.
- Quelles sont les positions relatives de $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ et de π ?
- Donner la matrice de la symétrie f relativement à cette base $\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right)$.

Problème 2 (16 points)

(à résoudre sur une nouvelle double page)

Soit la courbe C_f de la fonction f définie par : $f(x) = x \cdot \sin x$
et la parabole d'équation $y = -x^2 + 3\pi x - 2\pi^2$.

1^{ère} partie

a) Sous quel angle les deux courbes se coupent-elles en $x = 2\pi$?

2^{ème} partie

Au cours de l'élaboration d'une phase d'un jeu vidéo, on cherche à évaluer la probabilité de gagner. L'écran est le rectangle $ABCD$ déterminé par les coordonnées de ses sommets:

$A(0;8)$, $B(0;-5)$, $C(3\pi;-5)$ et $D(3\pi;8)$.

La courbe C_f partage l'écran en deux parties:

- la partie de l'écran située au-dessus de la courbe représente une mare et elle est notée (M) .
- la partie de l'écran située au-dessous de la courbe représente le terrain de jeu et elle est notée (T)

Le jeu consiste à simuler le lancer d'une balle. On admet que la probabilité d'atteindre une des deux parties de l'écran est proportionnelle à son aire.

b) Déterminer la probabilité $P(T)$ que la balle atteigne la zone (T) .

Pour la suite, on pose $P(T) = \frac{6}{13}$.

c) Le jeu consiste à simuler trois lancers successifs et indépendants.

On gagne lorsque deux au moins des trois balles lancées atteignent la partie (T) .

Calculer la probabilité de gagner.

d) Si la balle atteint la mare, le joueur perd un point sinon il gagne deux points.

Donner la loi de probabilité qui définit le gain du joueur en trois lancers.

e) Quelle est son espérance de gain ?

Problème 3 (8 points)

(à résoudre sur une nouvelle double page)

En annexe, on donne un extrait des tables de mortalité de la population suisse 1988-1993 qui concerne uniquement les statistiques pour les hommes.

On considère dans ce problème une population initiale l_0 de 100'000 hommes.

On définit:

l_x = nombre de survivants à l'âge x ($l_0 = 100000$).

p_x = probabilité annuelle de survie à l'âge x ; c'est la probabilité, pour un homme d'âge x d'atteindre l'âge $(x + 1)$.

q_x = probabilité annuelle de décès à l'âge x ; c'est la probabilité, pour un homme d'âge x de ne pas atteindre l'âge $(x + 1)$.

exemple : sur 100000 garçons à la naissance, le nombre de survivants à l'âge d'un an est donné par $l_1 = p_0 \cdot l_0 = 0.992458 \cdot 100000 = 99245.8 \approx 99246$.

a) Comment calculer q_x si on connaît p_x ?

b) Calculer le nombre de décès durant la première année.

c) Combien y a-t-il d'hommes survivants à l'âge de 50 ans ?

d) Calculer la probabilité qu'un homme de 60 ans atteigne l'âge de 65 ans

i) en considérant exclusivement la suite $\{l_0, l_1, \dots, l_{108}\}$.

ii) en considérant exclusivement la suite $\{p_0, p_1, \dots, p_{108}\}$.

(dans les deux cas, l'expression algébrique est demandée)

e) Calculer la probabilité qu'un homme de 60 ans décède dans sa 65^e année

(en précisant l'expression algébrique utilisée).

f) Expliquer à quoi correspond le quotient $\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$?

g) Expliquer à quoi correspond le produit $l_x \cdot q_x$

