COLLÈGE SAINTE-CROIX
1700 FRIBOURG

MATURITÉ 2004
DURÉE: 3 HEURES

# MATHÉMATIQUES

- Résoudre dans un ordre quelconque les quatre problèmes donnés ci-après. Pour chaque problème, utiliser une nouvelle double feuille différente.
- Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.
- Sauf indication spéciale, les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

## Problème 1 (8 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = 0.2x^3 - 0.4x^2 - 2.2x + 2.4$.

a) A l'aide de la calculatrice, trouver les zéros u, v et w (écrits dans l'ordre croissant) et les extremums de la fonction.

b) Représenter graphiquement la fonction f, en faisant figurer avec précision les zéros, les extremums et l'ordonnée à l'origine.
Unité graphique sur chacun des deux axes: 2 carrés.

c) On considère la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $-1$. Montrer, par calcul, que cette tangente passe par le point $(w;0)$.

d) Hachurer la surface comprise entre la tangente et la courbe de f sur l'intervalle $[u;w]$.
Calculer l'aire de cette surface (calcul de la primitive demandé).

## Problème 2 (5 points)

Une entreprise possède un système d'alerte anti-incendie. S'il y a danger, l'alarme se déclenche avec une probabilité de 0,99. S'il n'y a aucun danger, l'alarme peut se déclencher (par exemple pour une simple fumée de cigarette) avec une probabilité de 0,005. La probabilité pour qu'il y ait danger (début d'incendie) est 0,001.

Notons D l'événement «il y a danger» et A l'événement «l'alarme se déclenche».

a) Représenter le problème à l'aide d'un arbre ou d'un tableau.

b) Déterminer $p(A|D)$, $p(A|\overline{D})$ et $p(A)$.

c) Calculer la probabilité d'une fausse alerte, c'est-à-dire la probabilité qu'il n'y ait pas de danger sachant que l'alarme s'est déclenchée.

d) Calculer la probabilité d'une alerte manquée, c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait danger sachant que l'alarme ne s'est pas déclenchée.

## Problème 3 (7 points)

Une station pompe l'eau d'une rivière pour la transformer ensuite en eau potable. Lors d'une pollution, elle doit interrompre ses prélèvements le temps que la vague de pollution soit évacuée par le courant. On suppose qu'à partir de l'alerte, donnée à l'instant $t = 0$, la concentration en polluant P, exprimée en milligrammes par litre, dépend du temps t exprimé en heures, suivant la relation $P(t) = 200t\,e^{-2t}$ pour $t \geq 0$.

a) Calculer la dérivée $P'(t)$. En déduire le tableau de variation de la fonction P.

b) A quel moment après le début de l'alerte, la pollution est-elle maximale? Quelle est alors la concentration en polluant?

c) Calculer $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$. Justifier et interpréter le résultat.

d) Les normes en vigueur indiquent que ce polluant devient dangereux pour la santé si sa concentration dépasse 5 mg/l.

   i) Déterminer à l'aide de votre calculatrice à partir de quel instant (en heures et en minutes) la station peut reprendre son pompage sans risque pour la santé.

   ii) Entre le début de l'alerte et l'arrêt effectif du pompage, il s'est écoulé exactement 6 minutes. Peut-on affirmer que l'eau prélevée a toujours été conforme aux normes en vigueur de ce polluant? Justifier par un calcul.

## Problème 4 (5 points)

En annexe, on donne un extrait des tables de mortalité de la population suisse 1988 – 1993 qui concerne uniquement les statistiques pour les hommes. On considère dans ce problème une population initiale $l_0$ de 100000 hommes.

On définit:

$l_x$ = nombre de survivants à l'âge x $(l_0 = 100000)$;

$p_x$ = probabilité annuelle de survie à l'âge x; c'est la probabilité, pour un homme d'âge x d'atteindre l'âge $(x+1)$;

$q_x$ = probabilité annuelle de décès à l'âge x; c'est la probabilité, pour un homme d'âge x de ne pas atteindre l'âge $(x+1)$.

Par exemple (voir la table de la page suivante), sur **100000** garçons à la naissance, le nombre de survivants à l'âge d'un an est donné par $l_1 = p_0 \cdot l_0 = \mathbf{0.992458 \cdot 100000} = 99245.8 \approx \mathbf{99246}$.

a) Comment calculer $q_x$ si l'on connaît $p_x$?

b) Calculer le nombre de décès durant la première année.

c) Calculer le nombre moyen de décès par an durant les 5 premières années, c'est-à-dire jusqu'à l'âge de 5 ans.

d) A quelle probabilité correspond $\dfrac{l_4 - l_5}{l_4}$?

e) Combien y a-t-il d'hommes survivants à l'âge de 60 ans? à 65 ans?

f) Calculer la probabilité qu'un homme de 60 ans atteigne l'âge de 65 ans.

Tables de mortalité de la population suisse (1988 – 1993)

| x | $l_x$ | $p_x$ | $q_x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | **100'000** | **0,992458** | 0,007542 |
| 1 | **99'246** | 0,999363 | 0,000637 |
| 2 | 99'183 | 0,999647 | 0,000353 |
| 3 | 99'148 | 0,999694 | 0,000306 |
| 4 | 99'117 | 0,999729 | 0,000271 |
| 5 | 99'090 | 0,999755 | 0,000245 |
| 6 | 99'066 | 0,999772 | 0,000228 |
| 7 | 99'044 | 0,999784 | 0,000216 |
| 8 | 99'022 | 0,999790 | 0,000210 |
| 9 | 99'001 | 0,999791 | 0,000209 |
| 10 | 98'981 | 0,999788 | 0,000212 |
| 11 | 98'960 | 0,999780 | 0,000220 |
| 12 | 98'938 | 0,999766 | 0,000234 |
| 13 | 98'915 | 0,999744 | 0,000256 |
| 14 | 98'889 | 0,999703 | 0,000297 |
| 15 | 98'860 | 0,999623 | 0,000377 |
| 16 | 98'823 | 0,999468 | 0,000532 |
| 17 | 98'770 | 0,999211 | 0,000789 |
| 18 | 98'692 | 0,998871 | 0,001129 |
| 19 | 98'581 | 0,998558 | 0,001442 |
| 20 | 98'439 | 0,998435 | 0,001565 |
| 21 | 98'285 | 0,998433 | 0,001567 |
| 22 | 98'131 | 0,998412 | 0,001588 |
| 23 | 97'975 | 0,998372 | 0,001628 |
| 24 | 97'815 | 0,998344 | 0,001656 |
| 25 | 97'653 | 0,998331 | 0,001669 |
| 26 | 97'490 | 0,998332 | 0,001668 |
| 27 | 97'328 | 0,998342 | 0,001658 |
| 28 | 97'166 | 0,998358 | 0,001642 |
| 29 | 97'007 | 0,998378 | 0,001622 |
| 30 | 96'850 | 0,998396 | 0,001604 |
| 31 | 96'694 | 0,998412 | 0,001588 |
| 32 | 96'541 | 0,998420 | 0,001580 |
| 33 | 96'388 | 0,998419 | 0,001581 |
| 34 | 96'236 | 0,998406 | 0,001594 |
| 35 | 96'082 | 0,998380 | 0,001620 |
| 36 | 95'927 | 0,998341 | 0,001659 |
| 37 | 95'768 | 0,998289 | 0,001711 |
| 38 | 95'604 | 0,998223 | 0,001777 |
| 39 | 95'434 | 0,998143 | 0,001857 |
| 40 | 95'257 | 0,998045 | 0,001955 |
| 41 | 95'071 | 0,997931 | 0,002069 |
| 42 | 94'874 | 0,997796 | 0,002204 |
| 43 | 94'665 | 0,997640 | 0,002360 |
| 44 | 94'441 | 0,997459 | 0,002541 |
| 45 | 94'201 | 0,997251 | 0,002749 |
| 46 | 93'942 | 0,997012 | 0,002988 |
| 47 | 93'662 | 0,996741 | 0,003259 |
| 48 | 93'356 | 0,996432 | 0,003568 |
| 49 | 93'023 | 0,996083 | 0,003917 |
| 50 | 92'659 | 0,995688 | 0,004312 |
| 51 | 92'259 | 0,995244 | 0,004756 |
| 52 | 91'821 | 0,994746 | 0,005254 |
| 53 | 91'338 | 0,994190 | 0,005810 |
| 54 | 90'808 | 0,993570 | 0,006430 |

| x | $l_x$ | $p_x$ | $q_x$ |
|---|---|---|---|
| 55 | 90'224 | 0,992881 | 0,007119 |
| 56 | 89'581 | 0,992116 | 0,007884 |
| 57 | 88'875 | 0,991267 | 0,008733 |
| 58 | 88'099 | 0,990327 | 0,009673 |
| 59 | 87'247 | 0,989287 | 0,010713 |
| 60 | 86'312 | 0,988140 | 0,011860 |
| 61 | 85'288 | 0,986877 | 0,013123 |
| 62 | 84'169 | 0,985489 | 0,014511 |
| 63 | 82'948 | 0,983967 | 0,016033 |
| 64 | 81'618 | 0,982303 | 0,017697 |
| 65 | 80'174 | 0,980483 | 0,019517 |
| 66 | 78'609 | 0,978492 | 0,021508 |
| 67 | 76'918 | 0,976313 | 0,023687 |
| 68 | 75'096 | 0,973926 | 0,026074 |
| 69 | 73'138 | 0,971309 | 0,028691 |
| 70 | 71'040 | 0,968438 | 0,031562 |
| 71 | 68'798 | 0,965283 | 0,034717 |
| 72 | 66'409 | 0,961814 | 0,038186 |
| 73 | 63'873 | 0,957993 | 0,042007 |
| 74 | 61'190 | 0,953778 | 0,046222 |
| 75 | 58'362 | 0,949128 | 0,050872 |
| 76 | 55'393 | 0,943995 | 0,056005 |
| 77 | 52'291 | 0,938328 | 0,061672 |
| 78 | 49'066 | 0,932067 | 0,067933 |
| 79 | 45'733 | 0,925148 | 0,074852 |
| 80 | 42'309 | 0,917499 | 0,082501 |
| 81 | 38'819 | 0,909040 | 0,090960 |
| 82 | 35'288 | 0,899679 | 0,100321 |
| 83 | 31'748 | 0,889318 | 0,110682 |
| 84 | 28'234 | 0,877860 | 0,122140 |
| 85 | 24'785 | 0,865271 | 0,134729 |
| 86 | 21'446 | 0,851558 | 0,148442 |
| 87 | 18'263 | 0,836763 | 0,163237 |
| 88 | 15'281 | 0,820977 | 0,179023 |
| 89 | 12'546 | 0,804339 | 0,195661 |
| 90 | 10'091 | 0,787052 | 0,212948 |
| 91 | 7'942 | 0,769387 | 0,230613 |
| 92 | 6'111 | 0,751682 | 0,248318 |
| 93 | 4'593 | 0,734347 | 0,265653 |
| 94 | 3'373 | 0,715801 | 0,284199 |
| 95 | 2'414 | 0,695961 | 0,304039 |
| 96 | 1'680 | 0,674736 | 0,325264 |
| 97 | 1'134 | 0,652029 | 0,347971 |
| 98 | 739 | 0,627737 | 0,372263 |
| 99 | 464 | 0,601749 | 0,398251 |
| 100 | 279 | 0,573946 | 0,426054 |
| 101 | 160 | 0,544203 | 0,455797 |
| 102 | 87 | 0,512383 | 0,487617 |
| 103 | 45 | 0,478342 | 0,521658 |
| 104 | 21 | 0,441925 | 0,558075 |
| 105 | 9 | 0,402965 | 0,597035 |
| 106 | 4 | 0,361285 | 0,638715 |
| 107 | 1 | 0,316696 | 0,683304 |
| 108 | 0 | 0,000000 | 1,000000 |