Collège Sainte-Croix
Fribourg
Durée : 3 heures

Maturité 2003
Niveau II

Tables numériques et calculatrice graphique à disposition.

MATHEMATIQUES

Chaque problème est à rédiger sur une nouvelle feuille.
Une présentation claire, des réponses justifiées, précises, adaptées aux problèmes, sont exigées pour avoir la note maximum.
Sauf indication spéciale, les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

Problème 1 (16 points)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln(2x) + 6$.

a) Déterminer le sens de variation de g et en déduire le signe de g(x).
Les limites ne sont pas demandées.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3\ln(2x)}{\sqrt{x}} + x - 1$.

b) Montrer que la dérivée de f , $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

c) Utiliser les résultats de la question a) pour déterminer le sens de variation de f.
d) Calculer en détail les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
Les formules de la table numérique ne sont pas admises.
e) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f.
f) Etudier la position relative entre Δ et (C).
g) Calculer l'aire du domaine limité par Δ, (C), les droites d'équation $x=1$ et $x=4$.
Réponse exacte en fonction de ln(2).
Indication: intégration par parties.

Problème 2 (8 + 13 points)
Machine autorisée

Partie A

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère

- la droite (d) donnée par $\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = \quad -4k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

- le plan (Q) d'équation $x + z = 3$
- le plan (R) d'équation $7x + 4y = 0$.

a) Trouver l'équation cartésienne du plan (P_1) passant par le point A (1, 2, - 3) et perpendiculaire à la droite (d).

b) Trouver l'équation cartésienne du plan (P_2) passant par le point B (-1, -2, 2) et perpendiculaire aux deux plans (Q) et (R).

c) Résoudre le système (calcul matriciel conseillé) et interpréter le résultat.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 1 \\ 4x - 7y - 4z = 2 \\ -5x + 10y + 6z = -3 \end{cases}$$

Partie B

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, dont la matrice dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

a) f est-elle bijective? Justifier.

b) Déterminer et caractériser Ker(f), le noyau de f.

c) Déterminer et caractériser Im(f), l'image de f ; en donner une équation.

d) Déterminer l'ensemble I des vecteurs invariants par f.

e) Calculer la matrice de fof.

f) En déduire la nature géométrique de f. Préciser la base et la direction de f.

g) Donner une matrice de passage P de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$

telle que $M' = P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la nouvelle base $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$.

Problème 3 (16 points)

Machine autorisée.

On lance 2 dés non pipés à 6 faces et on note x_i l'écart entre le plus grand et le plus petit des deux nombres obtenus.
Par exemple, avec un 2 et un 5, l'écart vaut 3.

Soit X la variable aléatoire qui donne l'écart entre les deux dés.

a) Montrer que la probabilité d'obtenir un écart de 4, $P(X=4) = 1/9$.

b) Compléter le tableau en calculant les autres probabilités.

X	0	1	2	3	4	5
probabilité					1/9	

c) Calculer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.

On lance 3 fois les deux dés.

d) Quelle est la probabilité d'avoir exactement une fois l'écart de 4?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'écart de 4 sachant qu'au premier jet on a obtenu l'écart de 4?

Soit Y le nombre de fois où l'on obtient l'écart de 4 en lançant le dé 2000 fois.

f) Calculer la probabilité $P(210 < Y < 240)$.

g) Calculer le nombre k tel que $P(Y \geq k) \geq 90\%$.