Collège Sainte-Croix
Fribourg
Durée : 3 heures

Maturité 2002
Niveau II

Tables numériques et calculatrice graphique autorisées.

MATHEMATIQUES

Une présentation claire, des réponses justifiées, précises, adaptées aux problèmes, sont exigées pour avoir la note maximum.
Chaque problème est à rédiger sur une nouvelle feuille.

Problème 1 *(9 points)*

Analyse

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (a + b \ln x)\, x^2$, de courbe (C)
où a et b sont deux constantes réelles et ln est la fonction logarithme naturel (népérien).

a) Sachant que (C) admet au point A(1,3) une tangente de pente 4, déterminer les constantes a et b.

On considère pour les prochaines questions la fonction f définie par $f(x) = (3 - 2 \ln x)\, x^2$.

b) Calculer en détail, sans table numérique, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

c) Etudier la première dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f.

d) i) Déterminer les restrictions f_1 et f_2 ainsi que les ensembles E_i et F_i (i =1, i =2) tels que $f_i : E_i \rightarrow F_i$ soient bijectives. Justifier. On ne demande pas le calcul des fonctions réciproques f_1^{-1} et f_2^{-1}.

ii) Etablir l'équation de la tangente à la courbe d'une des fonctions réciproques, au point d'abscisse 3.

e) Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, (C) et les droites d'équation x=1 et x=e.

Problème 2 *(9 points)*

Probabilités

Le professeur Ja-kae a inventé un jeu adapté aux connaissances mathématiques et au porte-monnaie de ses élèves joueurs de Fri-croix.
L'élève paye Fr.2.- pour jouer. Le jeu se déroule en deux étapes.

Tout d'abord, il tire 2 boules simultanément d'une urne contenant 5 rouges, 4 blanches et 1 noire.
Si parmi les deux boules tirées il y a la boule noire (noter N cet événement), il récupère sa mise. Si parmi les deux boules tirées il n'y a pas la boule noire, il perd sa mise.

Il participe ensuite à une loterie. Il peut gagner Fr.4.- (noté L_1),
Fr.2.- (noté L_2)
ou rien (noté P).

Si le joueur a perdu sa mise lors du tirage des deux boules,
la probabilité qu'il gagne Fr.4.- à la loterie est de 1/5 et
la probabilité qu'il gagne Fr.2.- à la loterie est de 3/5.

a) Montrer que la probabilité d'avoir la boule noire est de 1/5.
b) Faire un arbre représentant ce jeu. Utiliser les notations indiquées. Indiquer sur cet arbre les probabilités connues.
c) Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a pas eu la boule noire.

On note X la variable aléatoire qui représente le gain final du joueur, mise déduite, à la fin du jeu.

On donne $p(X=0) = 1/2$ et $p(X = 2) = 1/5$.

d) Indiquer la valeur de X à la fin de chaque branche.
e) Compléter l'arbre après avoir calculé explicitement les probabilités manquantes.
f) Calculer, en vous aidant de l'arbre, $p(X=4)$.
g) Vérifier que X suit une loi de probabilité.
h) Le jeu est-il profitable au joueur? Justifier par un calcul.

Problème 3 *(5 points)*

Statistiques

Les calculs seront effectués avec la calculatrice, aucun détail n'est demandé.

Le nombre d'utilisateurs de téléphone mobile dans un pays voisin est donné par le tableau suivant :

Mois	déc.1996	oct.97	mai 98	oct.98	fév.99	juil.99	sept.99	mars 2000
Rang x_i du mois	0	10	17	22	26	31	33	39
Millions d'utilisateurs y_i	2,5	4,5	7,2	9,4	12	15	16,2	22,6

A. Réalisation d'un ajustement affine.

a) Reporter le nuage de points sur la feuille annexe, ainsi que le point moyen G dont on donnera les coordonnées.

b) Donner la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du coefficient de corrélation de cette série $(x_i ; y_i)$. Un ajustement affine est-il justifié?

c) Donner l'équation de la droite de régression D de y en x, sous la forme $y = ax + b$, a et b étant arrondis à 10^{-2} près. Tracer cette droite sur la feuille annexe.

B. Réalisation d'un autre ajustement.

On considère le tableau suivant:

Mois	déc.1996	oct.97	mai 98	oct.98	fév.99	juil.99	sept.99	mars 2000
Rang x_i du mois	0	10	17	22	26	31	33	39
$z_i=\ln(y_i)$	ln(2,5)	ln(4,5)	ln(7,2)	ln(9,4)	ln(12)	ln(15)	ln(16,2)	ln(22,6)

a) Donner l'équation de la droite de régression D' de z en x, sous la forme $z = a'x + b'$, a' et b' étant arrondis à 10^{-3} près.

b) Sachant que $z = \ln(y)$, en déduire que $y \cong 2,6\, e^{0,056x}$. On note C la courbe de cette équation.

c) Dessiner soigneusement sur la feuille annexe la courbe C définie sous b) pour $x \in [0, 40]$ en prenant les valeurs x_i du tableau.

d) En comparant D et C sur votre graphique, quel ajustement semble le meilleur?

Problème 4 *(11 points)*

Algèbre linéaire

Calculs autorisés à la machine.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{u'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, base orthonormée $B=(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice $F = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base B.

1. a) Donner l'expression analytique de $\vec{u'} = f(\vec{u})$.
   b) Caractériser Ker f, le noyau de f.
   c) Caractériser l'ensemble I des vecteurs invariants par f.

2. On considère la symétrie **orthogonale** s par rapport à la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de direction P.

   a) Donner l'équation du plan P.

   b) Vérifier que les vecteurs $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de P.

   c) Montrer que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   d) i) Donner la matrice S' de s dans la base B'.

   ii) En déduire que la matrice S de la symétrie dans la base B est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   e) i) Donner la matrice M dans la base B de l'application p telle que $f = s \circ p$.
   ii) Montrer que p est une projection.
   iii) Déterminer la base et la direction de p.