COLLEGE SAINTE-CROIX
1700 FRIBOURG

MATURITE 2002
DUREE: 3 HEURES

# MATHEMATIQUES

- Résoudre dans un ordre quelconque les quatre problèmes donnés ci-après. Pour chaque problème utiliser une nouvelle double feuille différente.
- Une présentation et une rédaction soignées sont exigées.
- Sauf indication spéciale, les raisonnements et les calculs doivent figurer sur votre travail.

## Problème 1 (12 points)

Lors d'une émission de radio, les auditeurs peuvent intervenir, durant 45 minutes, par messages électroniques.

Le nombre, par minute, de messages qui parviennent à la rédaction est donné par la fonction :

$$N(t) = e^{0{,}05 \cdot t} \qquad 0 \leq t \leq 45,$$

et la fonction K donne la taille de chacun des messages en Ko (kilooctets) :

$$K(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{60} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad 0 \leq t \leq 45,$$

où t, exprimé en minutes, représente le temps écoulé depuis le début de l'émission.

a) A quel moment la taille des messages atteint-elle son maximum ?

b) A quel moment le taux de variation instantané de la taille des messages atteint-il son maximum ?

c) Quel est le nombre total de messages reçus ?

d) Ces messages sont enregistrés sur un disque. Quelle place (en Ko) tous ces messages occupent-ils ? (*Poser les calculs; leur valeur numérique est livrée par votre calculatrice*).

## Problème 2 (12 points)

Un disque compact comprenant huit morceaux est introduit dans le lecteur CD d'une chaîne haute-fidélité.
L'appareil permet de passer dans un ordre aléatoire sans répétition ces morceaux.

On écoute l'enchaînement proposé par la chaîne.

a) Combien d'enchaînements distincts la chaîne peut-elle proposer ?

b) Quelle est la probabilité que la chaîne propose l'enchaînement que vous souhaitez entendre ?

c) On note E l'événement : « la chaîne propose le morceau numéro 8 en première position ». Calculer p(E).

d) On note F l'événement : « la chaîne propose le numéro 7 en deuxième position ». Les événements E et F sont-ils indépendants ?

Le disque comporte trois morceaux du groupe A, quatre du groupe B et un du groupe C. On écoute trois morceaux choisis aléatoirement.

On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de morceaux du groupe A.

e) Quelles sont les valeurs prises par X ?

f) Donner la loi de probabilité de X et calculer E(X).

## Problème 3 (6 points)

a) Soit H la fonction définie sur $]0;\infty[$ par

$$H(x) = -\frac{1}{x}\ln^2(x) - \frac{2}{x}\ln(x) - \frac{2}{x}.$$

Démontrer que, sur l'intervalle $]0;\infty[$, la fonction H est une primitive de la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}.$$

b) On considère la fonction f définie sur $]0;\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}.$$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan.

Soit S le solide engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface du plan délimitée par les droites d'équations $x = 1$, $x = e$, l'axe des x et la courbe C.
Calculer le volume V du solide S.

## Problème 4 (6 points)

On dispose d'une subvention de 414'000 fr. pour atteindre dans un désert une nappe d'eau souterraine. Le coût du forage est fixé à 1'000 fr. pour le premier mètre creusé, 1'200 fr. pour le deuxième et ainsi de suite en augmentant de 200 fr. par mètre creusé.
On désigne par $u_n$ le coût en francs du n-ième mètre creusé, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer $u_5$. Préciser la nature de la suite $(u_n)$ et exprimer $u_n$ en fonction de n.

b) Pour tout entier non nul n, on désigne par $S_n$ le coût total, en francs, d'un puits de n mètres.
Exprimer le coût total d'un puits de n mètres en fonction de n.

c) Déterminer la profondeur maximale du forage que l'on peut réaliser en respectant le crédit alloué.